



Física 2 para ciencias químicas a
distancia
FCEN – UBA - 1 Cuatrimestre 2020

La función potencial

Diferencia y función potencial

- Diferencia de potencial entre P_2 y P_1

$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

- Función potencial en el punto $\vec{r}$ respecto a un potencial de referencia en el punto fijo P_1

$$\phi_{P1}(\vec{r}) = - \int_{P_1}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Función potencial de una carga puntual q

- En la clase anterior habíamos calculado la integral $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$ para una carga puntual q

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

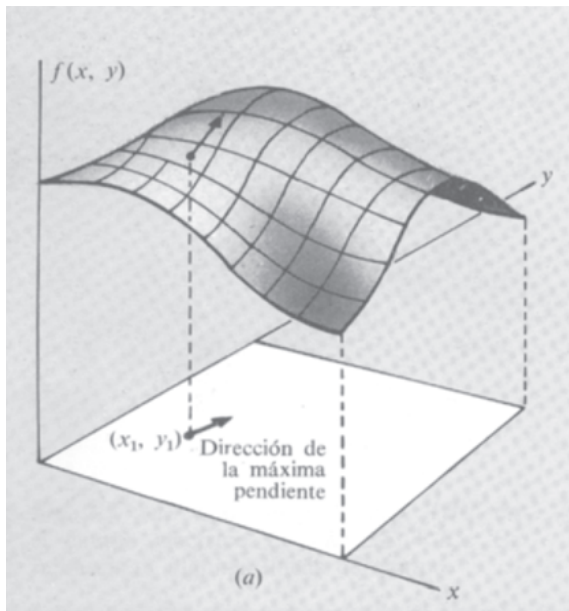
- Entonces, el potencial a una distancia r poniendo el cero del potencial en infinito es:

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Potencial de una distribución de
carga

Gradiente de la función potencial

Gradiente en una función
Bidimensional $f(x, y)$



- Dada una función $f(x, y, z)$ derivable, el vector gradiente $\vec{\nabla}f$ nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en el punto (x, y, z) .

- En cartesianas

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

Gradiente del potencial y campo eléctrico

- La variación del potencial en un punto (x, y, z) viene dada por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Por otro lado, sabemos que:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

donde $\overrightarrow{ds} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$

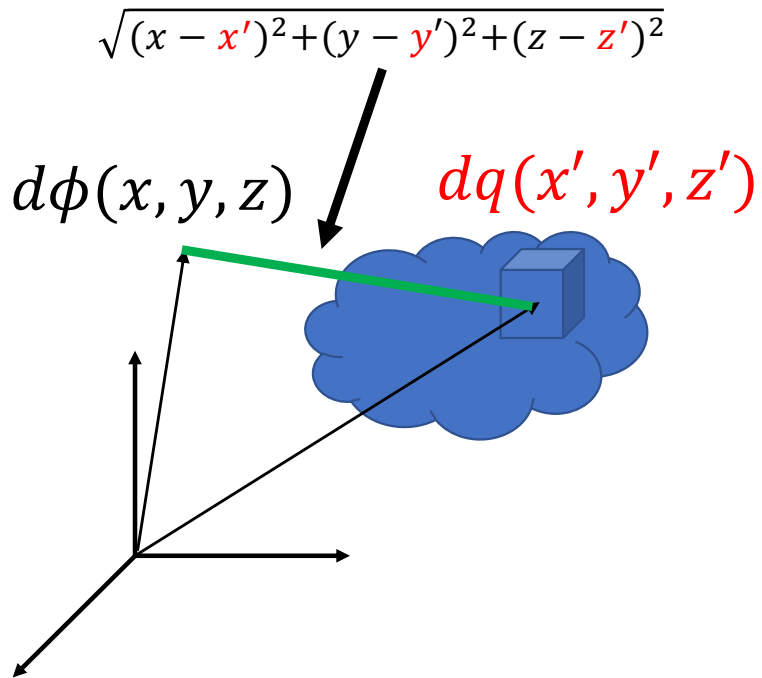
- Entonces:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Potencial de una distribución de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.
- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.
- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

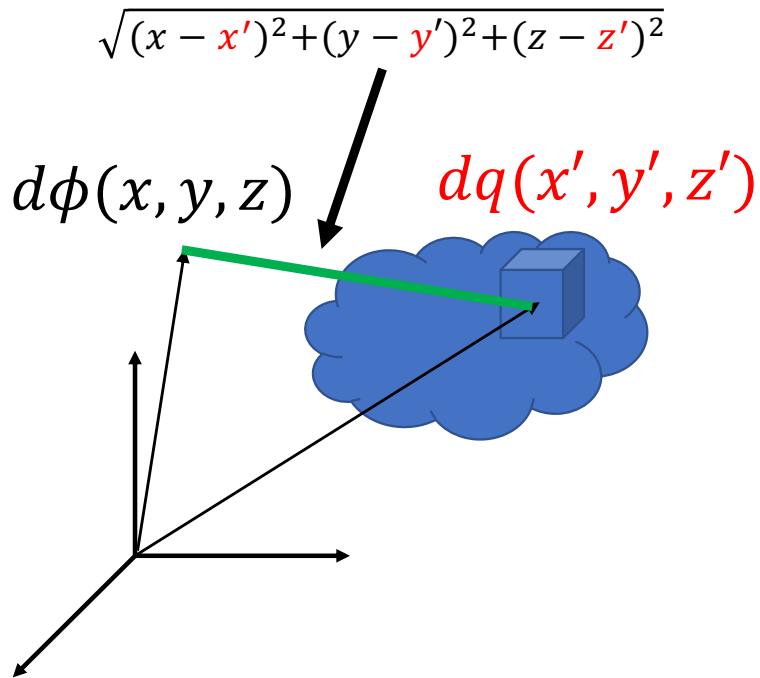
Potencial de una distribución de carga



- La contribución de un pedacito de carga $\rho(x', y', z')dx'dy'dz'$ al potencial en x, y, z es:

$$d\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Potencial de una distribución de carga



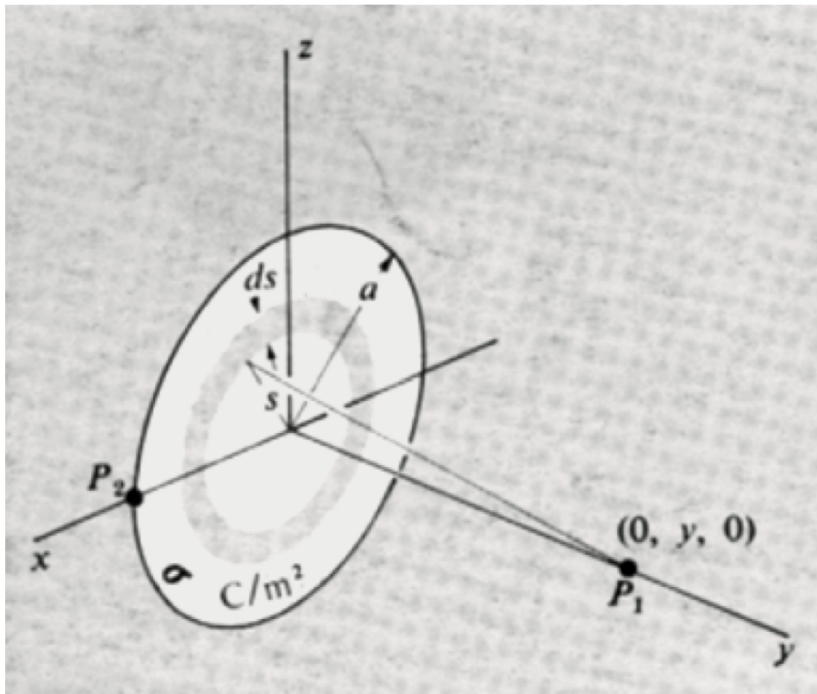
- La contribución de un pedacito de carga $\rho(x', y', z')dx'dy'dz'$ al potencial en x, y, z es:

$$d\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

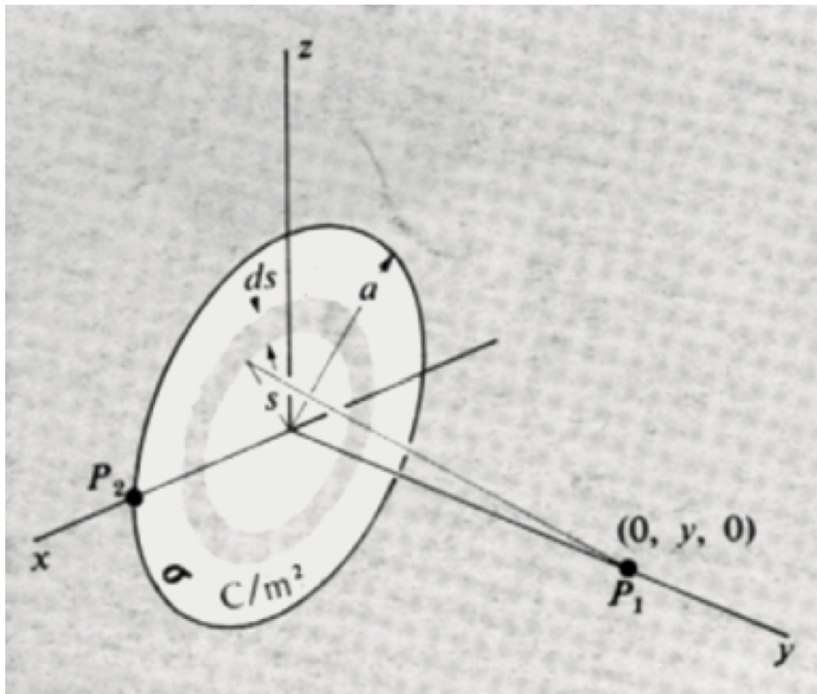
$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
 - Radio a
 - Grosor despreciable
 - $\sigma = \text{constante}$ ($\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$)

Ejemplo: disco cargado uniformemente



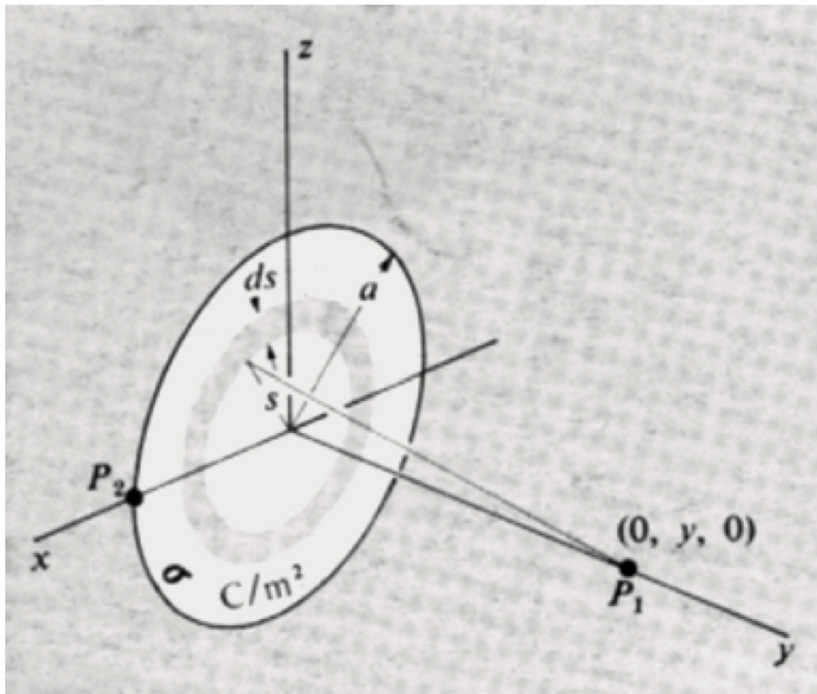
- Distribución acotada ✓
 - Radio a
 - Grosor despreciable
 - $\sigma = \text{constante } (\frac{C}{m^2})$
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría y .

$$dq = \sigma dA$$

$$dA = 2\pi s ds$$

(dA área de un anillo de radio s y ancho ds).

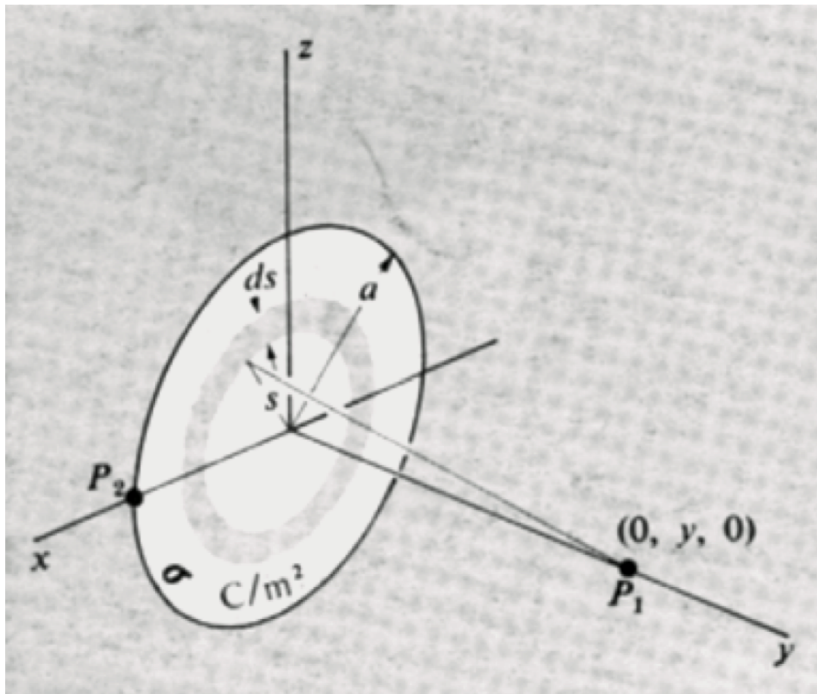
Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:
 $\sqrt{y^2 + s^2}$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\phi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente

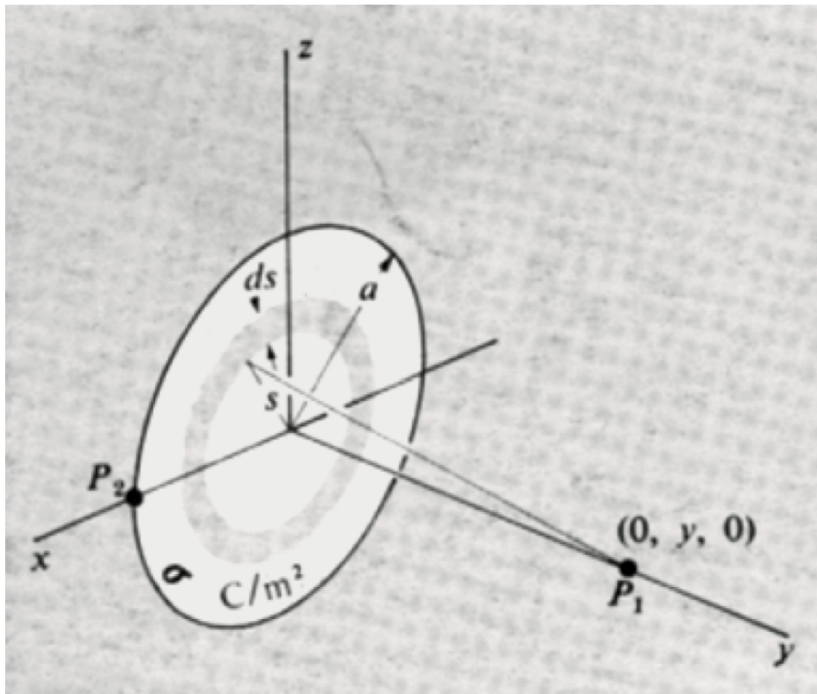


- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:
 $\sqrt{y^2 + s^2}$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma 2\pi s ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



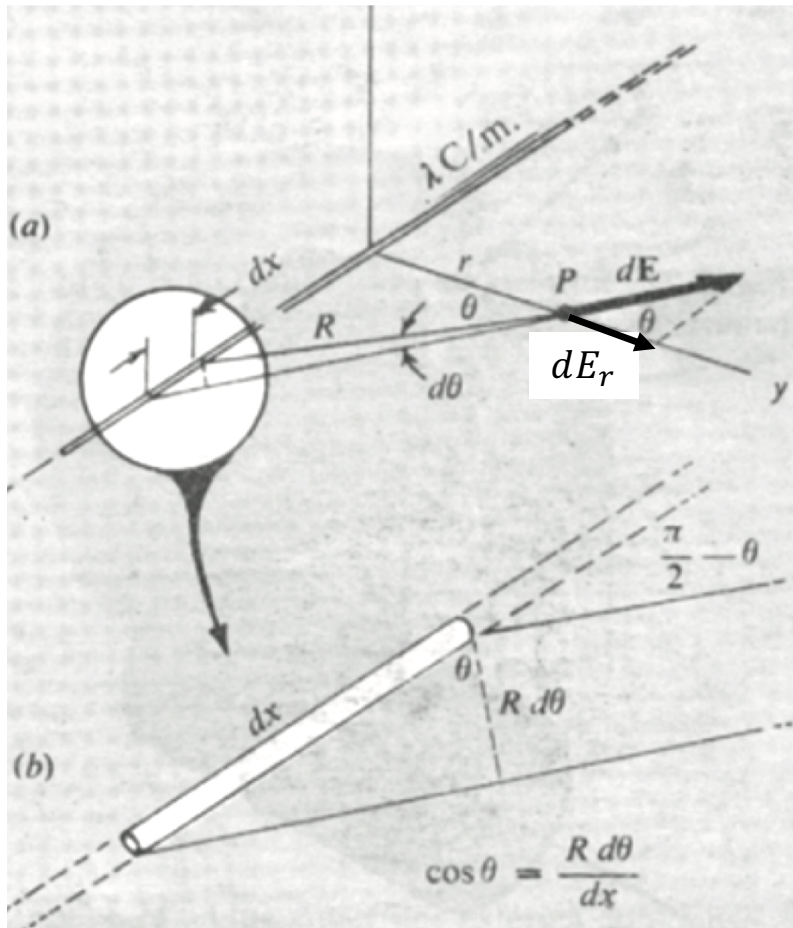
- La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2s \, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

El problema es simétrico respecto a $y = 0$

Potencial de una distribución lineal uniforme infinita



- Distribución acotada **X**
- No podemos aplicar la ecuación $\varphi(x, y, z)$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$
- Tendremos que definir el potencial respecto a otro punto que no sea el infinito mediante la fórmula:

$$\varphi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Potencial de una distribución lineal uniforme infinita

- Como el problema tiene simetría alrededor del eje sobre el que está la distribución de carga, de los puntos P_1 y P_2 sólo nos interesa la distancia al eje (ρ_1 y ρ_2 respectivamente). Reemplacemos $\vec{E}$.

$$\varphi_{21} = - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_1$$

ρ es la coordenada radial en cilíndricas

- Si pongo el potencial de referencia en ρ_1 , el potencial queda:

$$\varphi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{constante}$$

Potencial de una distribución lineal uniforme infinita

$$\varphi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_1}$$

Pregunta

- Calcule el gradiente de la expresión anterior y recupere la expresión del campo eléctrico para un hilo infinito

Momentos de una distribución de carga

El potencial lejos de una distribución

- Volvamos al caso de un disco uniformemente cargado. El potencial a lo largo del eje de simetría daba:

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

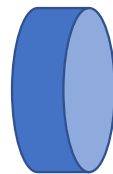
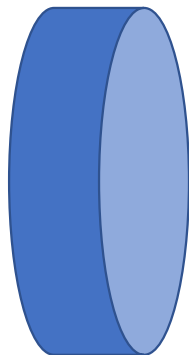
- Nos interesa saber a qué se parece el potencial a distancias grandes. Para $|y| \gg a$ podemos aproximar por serie de Taylor el término:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + a^2} - y &= y \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1 \right] \\ &= y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y} \end{aligned}$$

El potencial lejos de una distribución

- Reemplazando la aproximación, tenemos

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\epsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y} \text{ para } y \gg a$$



$$q = \sigma\pi a^2$$



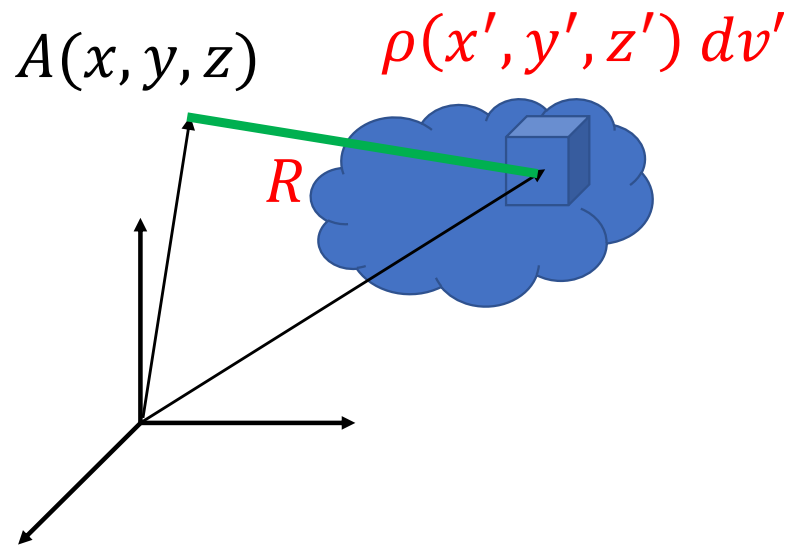
De lejos sólo se ve
una carga puntual

Momentos de una distribución de carga

- Un átomo o molécula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10^{-24} cm.
- ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?

Momentos de una distribución de carga

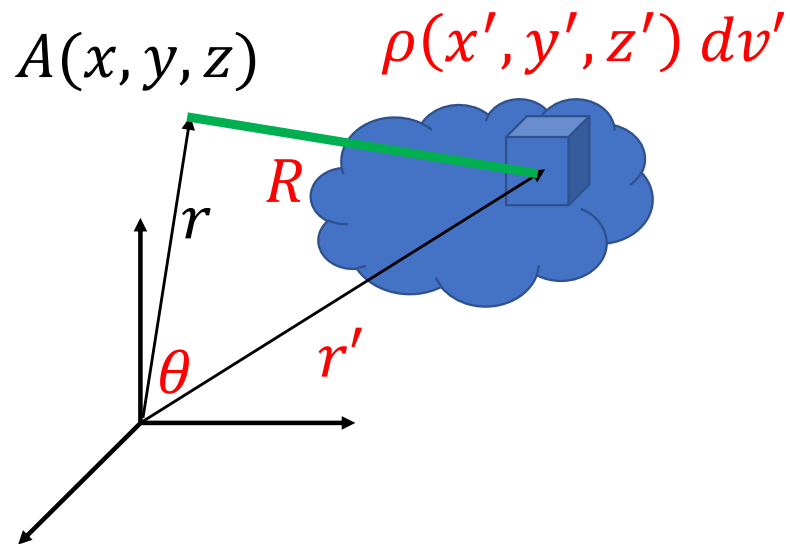
- Supongamos una distribución de cargas acotada $\rho(x', y', z')$ un punto A exterior a ρ .



$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dv'}{R}$$

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

Momentos de una distribución de carga



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- Supongamos una distribución de cargas acotada $\rho(x', y', z')$ un punto A exterior a ρ .

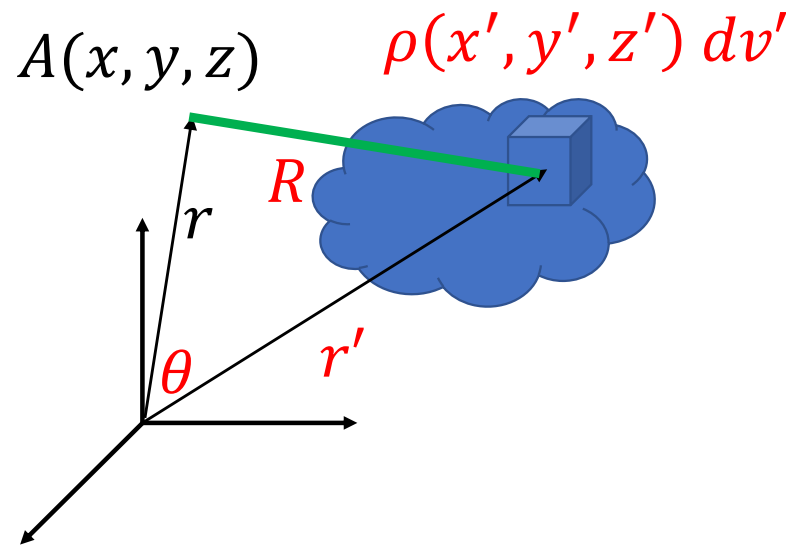
$$\varphi_A(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dv'}{R}$$

- Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}$$

Momentos de una distribución de carga

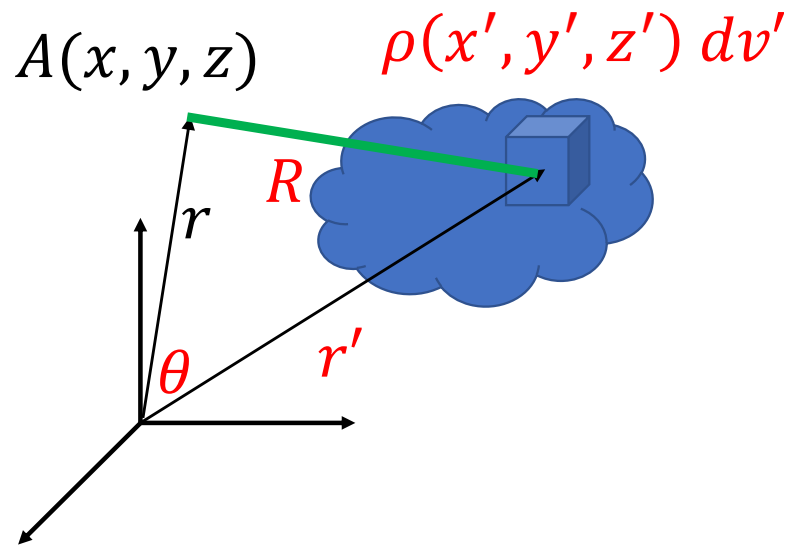
- La idea es ver qué pasa cuando $r \gg r'$.
Veamos un poco el factor $1/R$:



$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

Momentos de una distribución de carga



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- La idea es ver qué pasa cuando $r \gg r'$.
Veamos un poco el factor $1/R$:

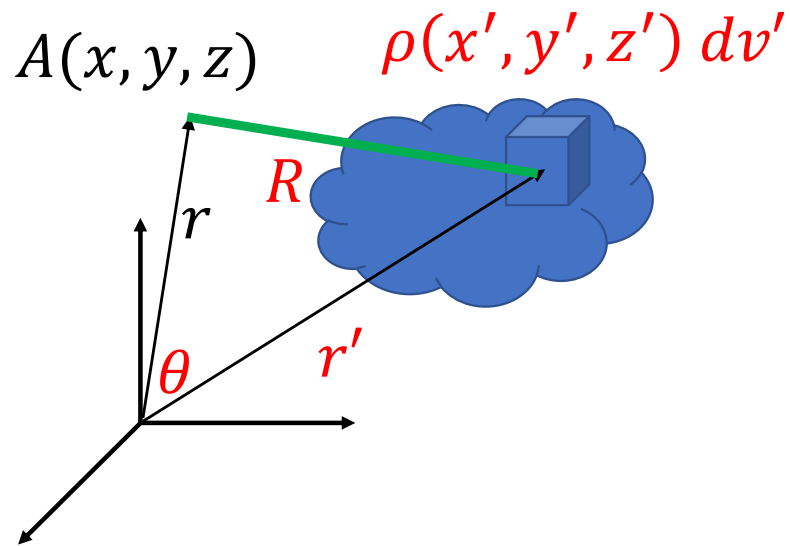
$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

- Podemos hacer el desarrollo en Taylor de $1/R$ para $r'/r \ll 1$. Tomando el desarrollo

$$(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \dots$$

para $\delta = \frac{r'}{r} \ll 1$

Momentos de una distribución de carga



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- Tomando esta expansión el factor $1/R$ queda:

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \left(\begin{array}{c} \text{términos de} \\ \text{grado superior} \end{array} \right) \right]$$

más grande >>>>>>>>> más chico

- Entonces, reemplazando en $\varphi_A(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \varphi_A = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho \, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho \, dv'}_{K_2} + \dots \end{aligned}$$

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi_A(x, y, z)$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de $1/r$)

$$\begin{aligned}\varphi_A = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho \, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho \, dv'}_{K_2} + \dots\end{aligned}$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0, K_1, K_2 , etc. Cada término se denomina momento.

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi_A(x, y, z)$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de $1/r$)

$$\varphi_A = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho \, dv'}_{K_0} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho \, dv'}_{K_2} + \dots$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0, K_1, K_2 , etc. Cada término se denomina momento.

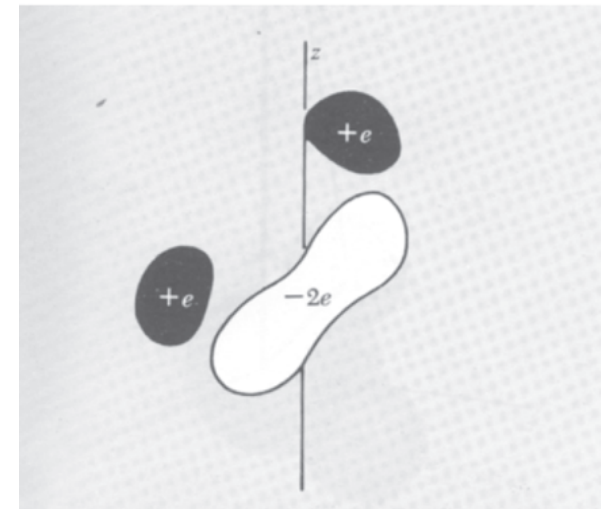
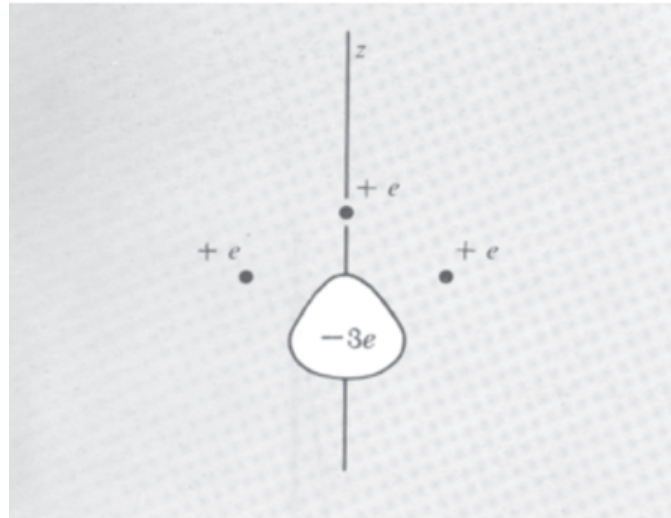
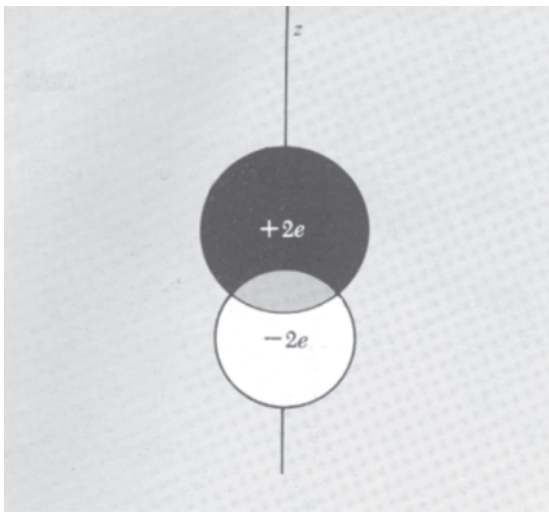
Momentos de una distribución de carga

- ¿Hace falta calcular todos los K_i ?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el **primer término no nulo** de la serie:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right]$$

Los coeficientes K_0 y K_1

- $K_0 = \int \rho \, dv'$ es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros)



¿Cuánto vale K_0 para en cada una de estas distribuciones ?

Los coeficientes K_0 y K_1

- Si $K_0 = 0$, calcularemos $K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv'$

- Para simplificar esta expresión consideremos el vector

$$\vec{p} = \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' \quad \text{Momento dipolar}$$

- Usando $\vec{p}$, tenemos: $\hat{r} \cdot \vec{p} = \hat{r} \cdot \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int \hat{r} \cdot \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int r' \cos \theta \rho(x', y', z') dv' = K_1$

- Por lo tanto: $K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p}$

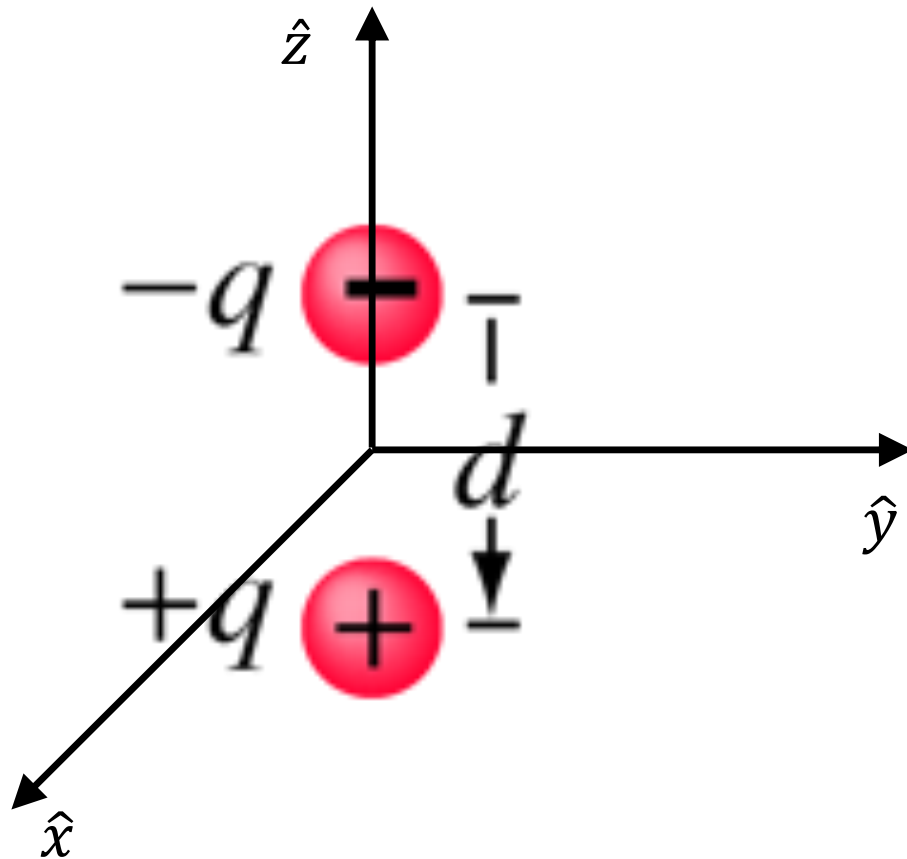
Los coeficientes K_0 y K_1

- Resumiendo, para un punto A en dirección $\hat{r}$ y a una distancia r de una distribución acotada $\rho(x', y', z')$, el potencial viene dado por:

$$\varphi_A = \frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots$$

- Donde $Q = K_0 = \int \rho \, dv'$ y $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(x', y', z') \, dv'$

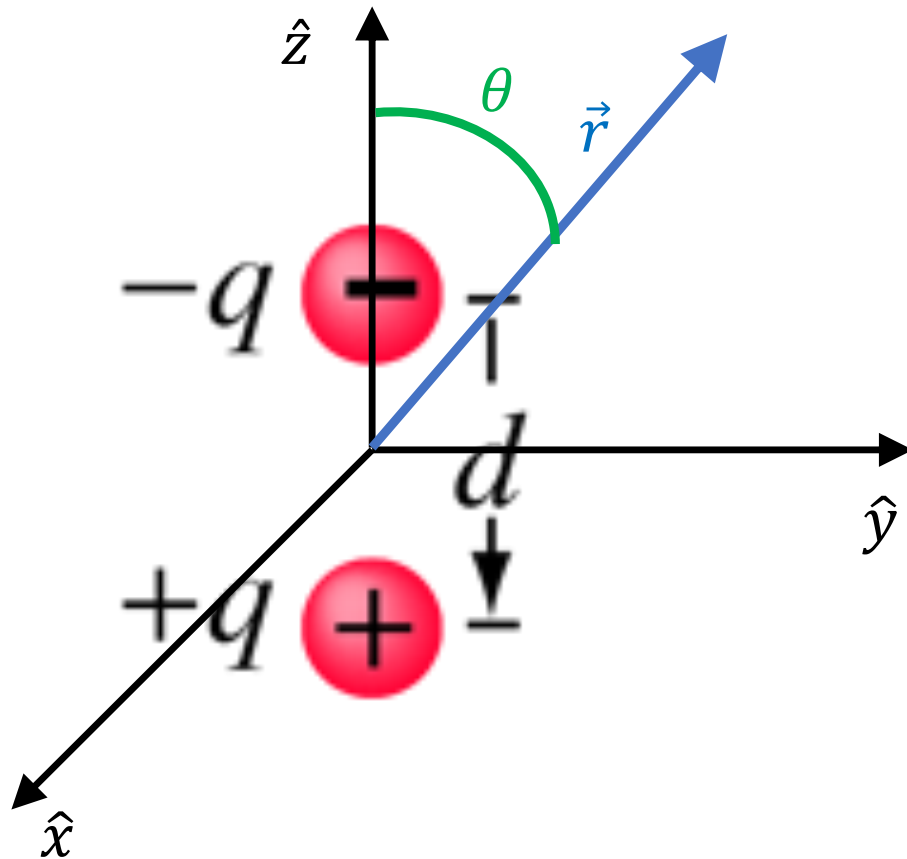
Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Dos cargas puntuales $\pm q$ en $z = \mp \frac{d}{2}$
- $K_0 = 0$
- Veamos K_1 . Para cargas puntuales

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i q_i$$

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Entonces:

$$\vec{p} = -\frac{d}{2}q\hat{z} + \frac{d}{2}(-q)\hat{z} = -qd\hat{z}$$

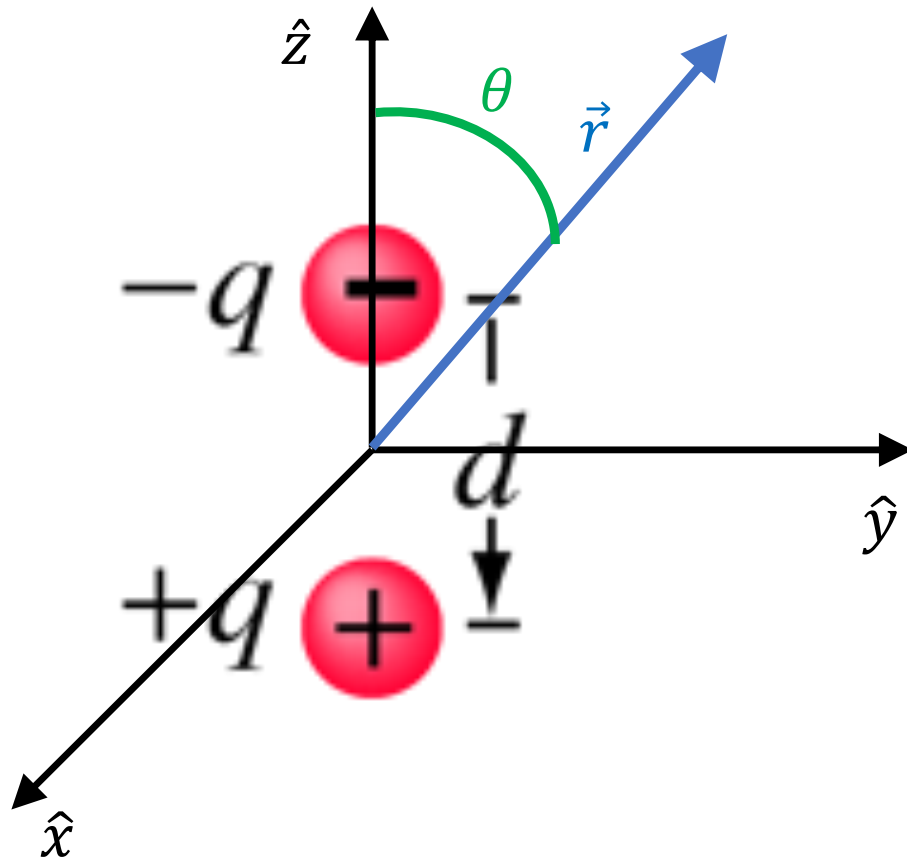
- Por lo tanto

$$K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p} = -qd \cos \theta$$

- Y entonces, lejos del dipolo

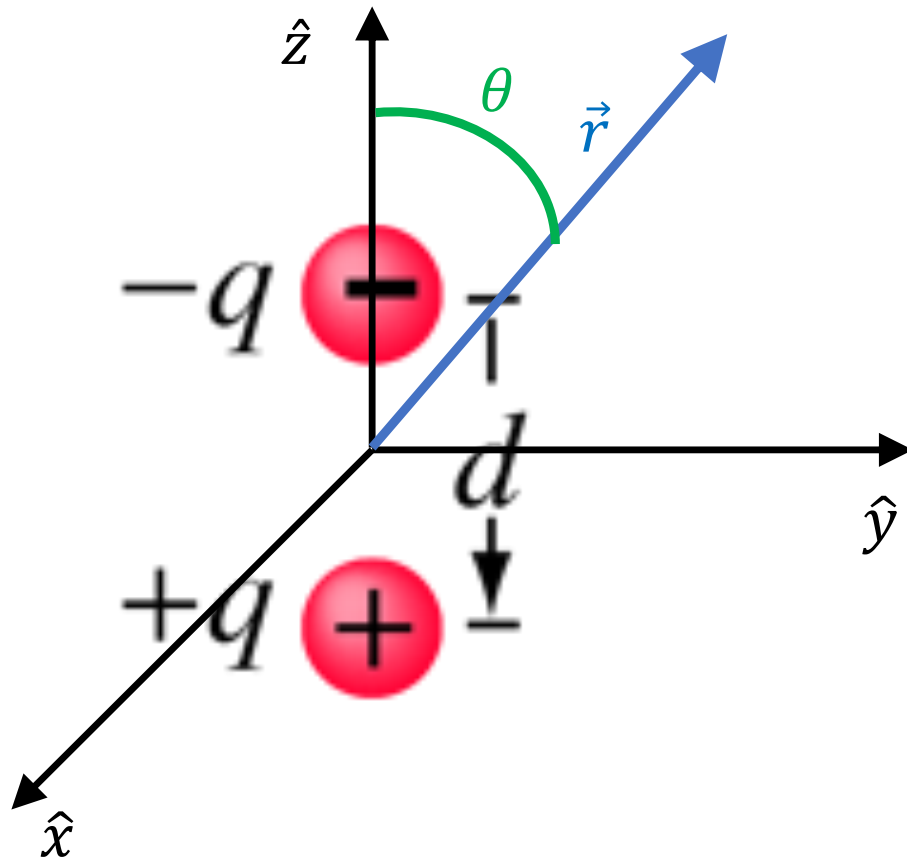
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- Calculemos el campo $\vec{E}$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$
- Tanto el potencial como el campo son simétricos alrededor del eje $\hat{z}$.
- Podemos calcular el potencial en cartesianas en algún plano que contenga al eje z . Por ejemplo el plano xz

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- En el plano xz, tenemos

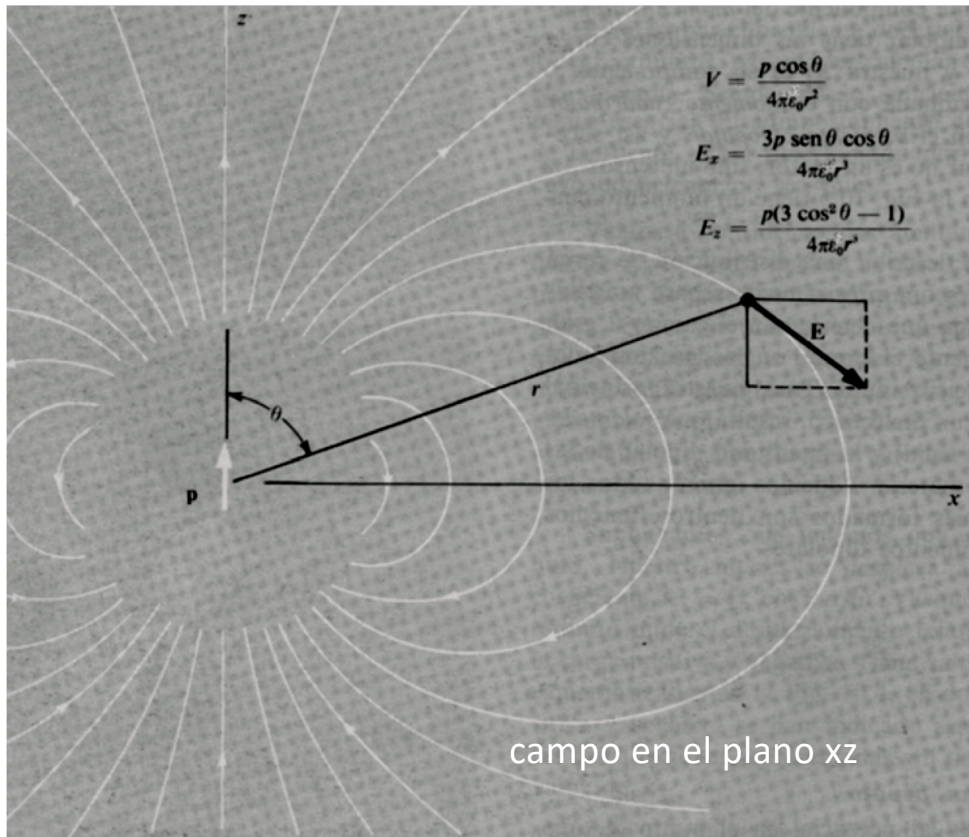
$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

- Entonces, en el plano xz el potencial en cartesianas se escribe:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- Calculemos el campo en el plano xz

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}\right]$$

- Sabiendo además que $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$
- En el plano xz, $E_y = 0$ y entonces:

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

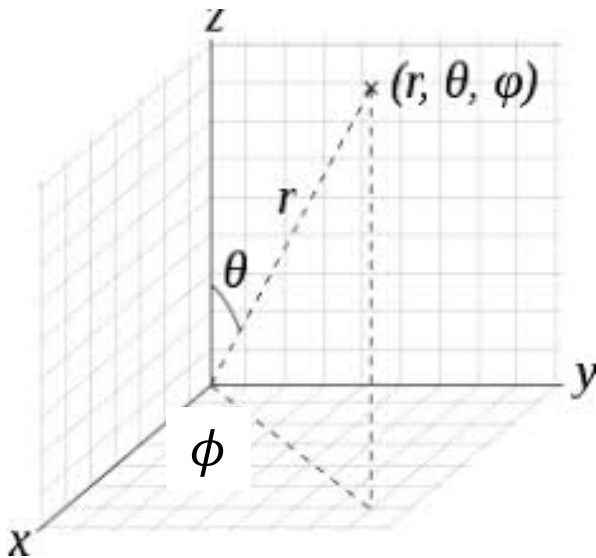
$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{r^3}$$

$$\begin{aligned} E_z &= - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

- También podemos hacer el cálculo del campo en esféricas.
- Esta vez la solución vale para todo el espacio
- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \hat{\theta}$$



Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

- Usando

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{E} = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} \hat{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$$

- Poloidal, decae como r^{-3}

