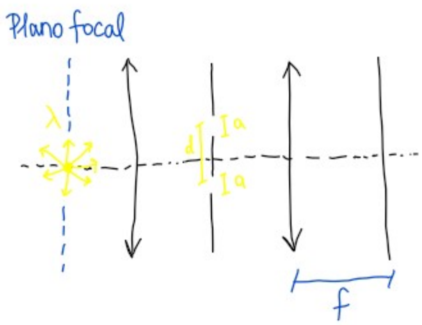
Guía 9 (2 rendijas - N rendijas)

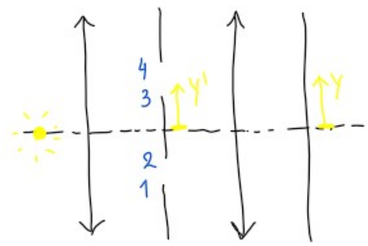
(Ej. 4 hasta ej.8)
(La parte de redes de difracción NO la vamos a ver)

2 rendijas

Ejercicio 4
Se tienen dos rendijas iguales de ancho a, cuya separación entre centros es d, colocadas entre dos lentes delgadas convergentes, ubicadas en forma simétrica respecto del eje óptico del sistema. Una fuente puntual monocromática se encuentra en el foco de la primera lente. Considere la figura de interferencia-difracción de Fraunhofer de la fuente.

(a) Calcule la posición de los máximos y mínimos tanto de interferencia como de difracción.
(b) Grafique la intensidad sobre la pantalla. ¿En función de qué variable lo hace? ¿Qué otra variable podría haber usado?
(c) ¿Cuántos órdenes de interferencia hay dentro de la campana principal de difracción?
(d) ¿Por qué motivo cuando se estudia el experimento de Young de interferencia no se tiene en cuenta el efecto de difracción en cada ranura?





Prima: Posición en el plano de las rendijas
No prima: Posición en la pantalla

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} Y_1' &= -\frac{d}{2} - \frac{a}{2} \\ Y_2' &= -\frac{d}{2} + \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \text{Rendija de abajo} \\ \left.\begin{aligned} Y_3' &= \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \\ Y_4' &= \frac{d}{2} + \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \text{Rendija de arriba} \end{cases}$$

- Vamos a pensar a cada punto de los infinitos puntos que forman a cada rendija, como una ***fuente puntual***.
- Queremos averiguar el campo que genera cada fuente puntual, después SUMAR el campo de todas las fuentes, y así obtener el campo total.
- Una vez que tenemos el campo total podemos sacar la intensidad de luz en función de Y → OBJETIVO!!

$dE = \epsilon_0 \, e^{i(kr-\omega t)} \, dy'$ Campo de una sola fuente puntual ---> Es un diferencial de campo

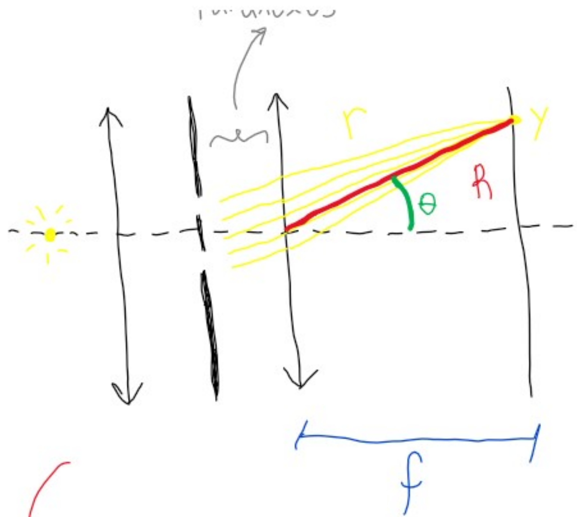
$\boxed{i^2 = -1}$

¿r?

$\boxed{dE^{real} = \mathrm{Re}\{dE\}}$

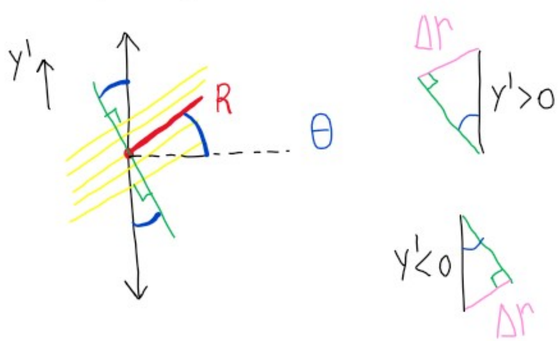
$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} r = R + \text{algo} \\ R\text{: Depende de } Y \\ \text{algo: Depende de } Y' \end{array} \right.$$

Hago un super zoom de forma que los rayos del lado derecho de la lente también parezcan paralelos:



$$\left\{ \begin{array}{l} r = R + \Delta r \\ \Delta r = -Y' \sin\theta \end{array} \right\}$$

algo → Lo aproximo por $-Y' \sin\theta$

El menos fíjense que tiene sentido (para Y' > 0 el camino óptico es menor a R, y para Y' < 0 es mayor).

$$\Rightarrow \boxed{r = R - Y' \sin\theta}$$

$$f \gg Y \Rightarrow \theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta \simeq tg\,\theta \simeq \frac{Y}{f}$$

Acuérdense que la dependencia con Y está en el seno de theta

$$dE = \epsilon_0 e^{i(k[R - Y' \sin\theta] - \omega t)} \, dY'$$

$$E(Y,t) = \int_{\text{Rendijas}} dE = \epsilon_0 e^{i(kR - \omega t)} \int_{\text{Rend.}} e^{-ikY' \sin\theta} dY'$$

Como tengo infinitas fuentes puntuales, 'sumar' sobre todas las fuentes significa *integrar.*

Saco afuera de la integral lo que no depende de la variable de integración

$$E(Y,t) = \underbrace{\epsilon_0 e^{i(kR - \omega t)}}_{\tilde{\epsilon}_0} \left\{ \underbrace{\int_{-\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-ikY' \sin\theta} dY'}_{\text{Rendija de abajo}} + \underbrace{\int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-ikY' \sin\theta} dY'}_{\text{Rendija de arriba}} \right\}$$

$$E(Y,t) = \tilde{\epsilon}_0 \left\{ \left. \frac{e^{-ikY' \sin\theta}}{-ik \sin\theta} \right|_{-\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} + \left. \frac{e^{-ikY' \sin\theta}}{-ik \sin\theta} \right|_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} \right\}$$

$$E(y,t)=\tilde{\varepsilon}_0\left\{\frac{e^{-ik\left(-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)\sin\theta}-e^{-ik\left(-\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)\sin\theta}}{-ik\sin\theta}+\frac{e^{-ik\left(\frac{d}{2}+\frac{a}{2}\right)\sin\theta}-e^{-ik\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)\sin\theta}}{-ik\sin\theta}\right\}$$

$$E(y,t)=\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{-ik\sin\theta}\left\{e^{ik\frac{d}{2}\sin\theta}\underbrace{\left[e^{-ik\frac{a}{2}\sin\theta}-e^{ik\frac{a}{2}\sin\theta}\right]}_{-2i\cdot\sin(\alpha)}+e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta}\underbrace{\left[e^{-ik\frac{a}{2}\sin\theta}-e^{ik\frac{a}{2}\sin\theta}\right]}_{-2i\cdot\sin(\alpha)}\right\}$$

$k\frac{a}{2}\sin\theta\equiv\alpha$

Sale de que:
$e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$

$$E(y,t)=\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{k\sin\theta}\cdot 2\sin(\alpha)\underbrace{\left\{e^{ik\frac{d}{2}\sin\theta}+e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta}\right\}}_{2\cos(\delta)}$$

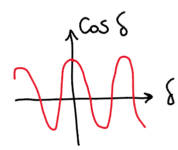
$k\frac{d}{2}\sin\theta\equiv\delta$

$$E(y,t)=\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{k\sin\theta}\cdot 4\sin\alpha\cdot\cos\delta=4\tilde{\varepsilon}_0\frac{\sin\alpha}{\underbrace{k\frac{a}{2}\sin\theta}_{=\alpha}}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\delta=2a\tilde{\varepsilon}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\delta$$

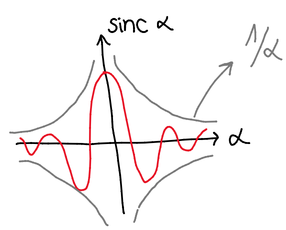
$=\text{sinc}\,\alpha$: Seno cardinal

$$E(y,t)=2a\tilde{\varepsilon}_0\cdot\text{sinc}\,\alpha\cdot\cos\delta$$

Término de interferencia
Solo depende de la distancia entre rendijas (d)



Término de difracción
Solo depende del tamaño de las rendijas (a)



Es un sin α modulado por $1/\alpha$

(b) Grafique la intensidad sobre la pantalla. ¿En función de qué variable lo hace? ¿Qué otra variable podría haber usado?

Intensidad = Amplitud del campo al cuadrado

$$E(y,t)=\underbrace{2a\,\varepsilon_0\cdot\text{sinc}\,\alpha\cdot\cos\delta}_{\text{Amplitud (A)}}\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$

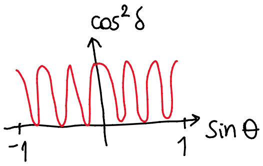
$$E(y,t)=A\,e^{i(\dots)}$$

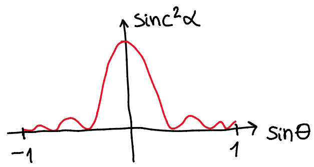
$$E\cdot E^*=A^2e^{i(\dots)}\cdot e^{-i(\dots)}=A^2\Rightarrow I=E\cdot E^*$$

$$\boxed{I = 4a^2 E_0^2 \cdot \text{sinc}^2\alpha \cdot \cos^2\delta}$$

$$\begin{cases} k\frac{a}{2}\sin\theta \equiv \alpha \\ k\frac{d}{2}\sin\theta \equiv \delta \end{cases} \rightarrow I(\sin\theta),\ I(\theta),\ I(Y)$$

$\sin\theta \simeq \theta$ $\qquad$ $\sin\theta \simeq \frac{Y}{f}$

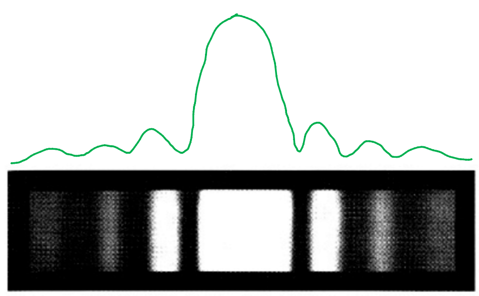




Acuérdense que el seno va entre -1 y 1! No puedo graficar más allá de esos valores

Gráfico de la intensidad en función de la posición en la pantalla $\longrightarrow$ El seno cardinal modula al coseno

Una ranura

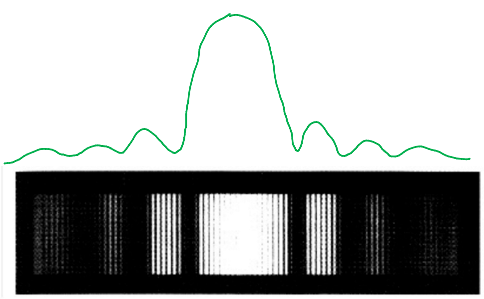


$\longrightarrow Y$

Una rendija: Solo tengo la curva de difracción

Grafico en verde las curvas de difracción

Dos ranuras



$\longrightarrow Y$

Dos rendijas: A la curva de difracción se le suma la interferencia

(a) Calcule la posición de los máximos y mínimos tanto de interferencia como de difracción.

- Máximos y mínimos (extremos) de difracción:

O sea que quiero los extremos de $\text{sinc}^2\alpha$

$$\begin{cases} \text{Extremos de } \text{sinc}\,\alpha \rightarrow \text{Máximos de } \text{sinc}^2\alpha \\ \text{Ceros de } \text{sinc}\,\alpha \rightarrow \text{Mínimos de } \text{sinc}^2\alpha \rightarrow \text{Valen cero} \end{cases}$$

Extremos de $\text{sinc}\,\alpha \rightarrow \alpha = \tan\alpha$

Ceros de $\text{sinc}\,\alpha \rightarrow \alpha = m\pi,\ m \neq 0$
$(m = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots)$

Lo hizo Guillem la clase pasada

Extremos de difracción $\rightarrow$ $\boxed{\alpha = \tan\alpha\ ;\ \alpha = m\pi \text{ con } m \neq 0}$

- Máximos y mínimos (extremos) de interferencia:

O sea que quiero los extremos de $\cos^2\delta$

Igual que antes, busco extremos y ceros de $\cos\delta$

Extremos de $\cos\delta \rightarrow \delta = m\pi$ con $m = \dots -1, -2, 0, 1, 2, \dots\ (m \in \mathbb{Z})$

Ceros de $\cos\delta \rightarrow \delta = \frac{(2m+1)}{2}\pi$ con $m = \dots, -1, -2, 0, 1, 2, \dots\ (m \in \mathbb{Z})$

Extremos de interferencia $\rightarrow$ $\boxed{\delta = \frac{m}{2}\pi \text{ con } m \in \mathbb{Z}}$

(c) ¿Cuántos órdenes de interferencia hay dentro de la campana principal de difracción?

Ceros de difracción $\rightarrow \alpha = m\pi,\ m \neq 0$

$\Rightarrow$ La campana principal de difracción va desde $\alpha = -\pi$ hasta $\alpha = \pi$

$$\alpha = k\frac{a}{2}\sin\theta \begin{cases} = -\pi \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{-2\pi}{ka} \\ = \pi \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2\pi}{ka} \end{cases}$$

Órdenes de interferencia $\rightarrow$ Máximos de interferencia $\rightarrow \delta = k\frac{d}{2}\sin\theta = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z} \rightarrow \sin\theta = \frac{2n\pi}{kd}$

Quiero saber cuántos son los n que cumplen que $\frac{-2\pi}{ka} < \frac{2n\pi}{kd} < \frac{2\pi}{ka} \rightarrow \frac{-1}{a} < \frac{n}{d} < \frac{1}{a} \rightarrow \frac{-d}{a} < n < \frac{d}{a}$

- Si $\frac{d}{a}$ no es entero $\Rightarrow$ Tengo $\boxed{2\cdot \text{int}\left(\frac{d}{a}\right)+1}$ órdenes de interferencia en la campana ppal. de difracción

Ejemplo: $\begin{cases} \text{int}(5,8) = 5 \\ \text{int}(3,01) = 3 \\ \text{int}(15,98) = 15 \end{cases}$

$$n = \underbrace{-\text{int}\left(\tfrac{d}{a}\right), -\text{int}\left(\tfrac{d}{a}\right)+1, \dots, -2, -1}_{\text{int}\left(\frac{d}{a}\right)\text{ órdenes}},\ \underbrace{0}_{\text{Un orden}},\ \underbrace{1, 2, \dots, \text{int}\left(\tfrac{d}{a}\right)-1, \text{int}\left(\tfrac{d}{a}\right)}_{\text{int}\left(\frac{d}{a}\right)\text{ órdenes}}$$

- Si $\frac{d}{a}$ es un entero $\Rightarrow$ Tengo $\boxed{\frac{2d}{a} - 1}$ órdenes de interferencia en la campana ppal. de difracción

Justo en n = d/a voy a tener un máximo (es decir, un orden) de interferencia y

• Si $\frac{d}{a}$ es un entero $\rightarrow$ tengo $\boxed{\frac{2d}{a}-1}$ órdenes de interferencia en la campana ppal. de difracción

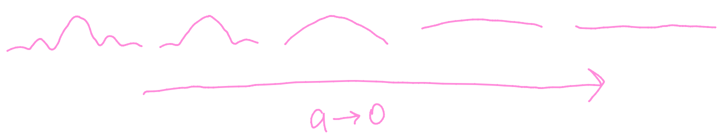
Justo en n = d/a voy a tener un máximo (es decir, un orden) de interferencia y un mínimo (un cero) de difracción!! (El orden n = d/a de interferencia va a coincidir justo con el fin de la campana principal de difracción).

O sea que voy a perder dos órdenes de interferencia (n = d/a y n = -d/a) porque van a ser ''aplastados'' por la campana de difracción.

(d) ¿Por qué motivo cuando se estudia el experimento de Young de interferencia no se tiene en cuenta el efecto de difracción en cada ranura?

Hay que tomar el límite $a \to 0$

$\Rightarrow$ Ancho campana ppal. de difracción : $\underbrace{\Delta\theta = \frac{2\lambda}{a}}_{\text{Clase pasada}} \to \infty \Rightarrow$ La difracción se vuelve irrelevante



Ejercicio 5

Se realiza una experiencia de difracción por doble rendija con una fuente que emite en 400nm. La separación entre los puntos medios de las rendijas es de 0,4mm y el ancho de cada una de ellas es de 0,04mm. La pantalla está a 1m de las rendijas. Si se cambia la fuente por otra que emite en 600nm, determine:

(a) en cuánto varió la interfranja,

(b) en cuánto varió el número total de franjas de interferencia contenidas en el máximo principal de difracción,

(c) y en cuánto varió el ancho angular de la campana principal de difracción.

Solo un par de comentarios:

- Ya no hay lentes. Pero no importa, porque la pantalla está MUY lejos comparado con el tamaño de las rendijas y la distancia entre ellas. Esto cumple la misma función que las lentes (hacer que los rayos que interfieren sean los que salen paralelos).
- El valor de la inter-franja es el mismo que calculamos para Young (la difracción solo me modula el patrón de intensidad, pero lo que me da la inter-franja es la interferencia).

Ejercicio 6

Sobre dos ranuras de Young separadas una distancia de 1mm incide la superposición de dos ondas planas monocromáticas de longitudes de onda λ_1 y λ_2.

(a) ¿Qué relación debe satisfacer el cociente λ_1/λ_2 para que el tercer orden de interferencia constructiva de λ_1 coincida con el tercer mínimo de λ_2?

(b) ¿Qué ancho deben tener las ranuras para que además esos órdenes coincidan con el primer mínimo de difracción de λ_1?

(c) ¿Qué intensidad se registrará en la pantalla en ese punto?

(a) ¿Qué relación debe satisfacer el cociente λ_1/λ_2 para que el tercer orden de interferencia constructiva de λ_1 coincida con el tercer mínimo de λ_2?

3^{er} máximo de interf. de $\lambda_1 \longrightarrow \delta = k_1 \frac{d}{2} \sin\theta = 2\pi$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

3^{er} máximo de interf. de $\lambda_1 \longrightarrow \delta = k_1 \frac{d}{2} \sin\theta = 2\pi$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

3^{er} mínimo de interf. de $\lambda_2 \longrightarrow \delta = k_2 \frac{d}{2} \sin\theta = \frac{5}{2}\pi$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{4\pi}{\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_1}}_{k_1} d} = \frac{5\pi}{\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_2}}_{k_2} d} \Rightarrow 2\lambda_1 = \frac{5}{2}\lambda_2 \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{5}{4}}$$

N rendijas

Ejercicio 7

Una onda plana monocromática de longitud de onda λ incide normalmente sobre una red de transmisión plana formada por N rendijas de ancho a y de período d ($a \ll d$). Suponga que la teoría escalar corresponde a una descripción exacta del fenómeno.

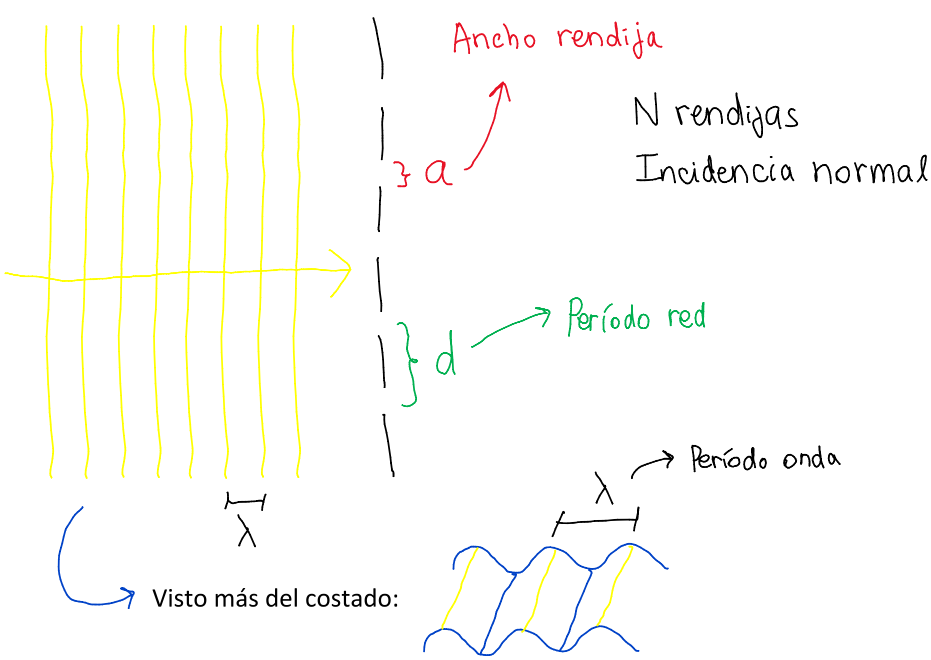
(a) Se coloca una pantalla de observación de modo de observar difracción de Fraunhofer. Analice la distribución de intensidad sobre la pantalla y grafíquela.

(b) Calcule la posición angular de las líneas espectrales y su intensidad. ¿Las líneas espectrales corresponden a los máximos de interferencia o de difracción? Calcule la separación angular entre dos líneas consecutivas.

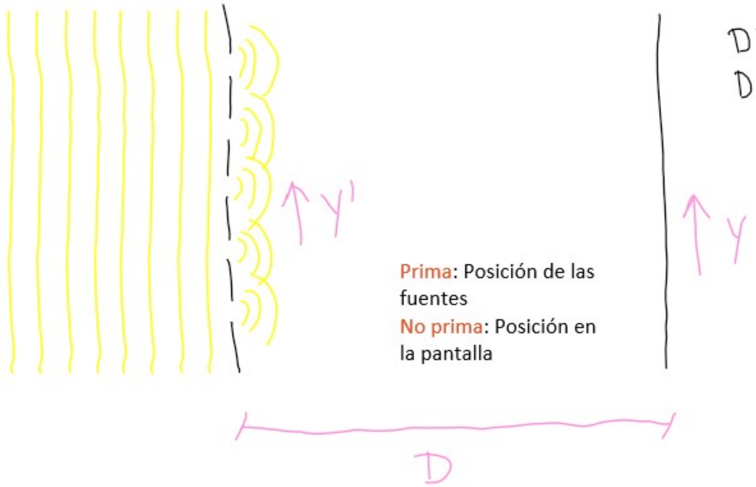
(c) ¿Cuántos mínimos de interferencia hay entre dos líneas espectrales consecutivas? ¿Cuántos máximos secundarios hay entre dichas líneas?

(d) Calcule el ancho angular de las líneas espectrales.

(e) Si la incidencia sobre la red no es normal, ¿cómo cambia la figura de interferencia-difracción?



(a) Se coloca una pantalla de observación de modo de observar difracción de Fraunhofer. Analice la distribución de intensidad sobre la pantalla y grafíquela.



$$\left.\begin{matrix} D \gg a \\ D \gg d \end{matrix}\right\}$$ Para ver difracción de Fraunhofer (campo lejano!)

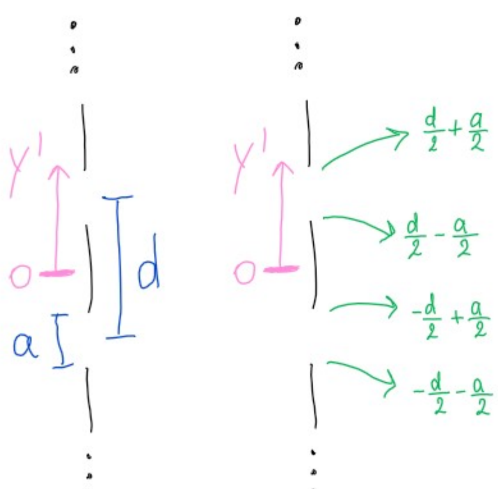
¿$I(y)$?

$$dE = \epsilon_0 e^{i(kr-\omega t)} dy'$$ Campo de una sola fuente (puntual) ---> Es un diferencial de campo

$$\begin{cases} r = R - y'\sin\theta \\ \sin\theta \simeq \dfrac{y}{D} \end{cases}$$

$$E(y,t) = \int_{\text{Rendijas}} dE = \epsilon_0 e^{i(kR-\omega t)} \int_{\text{Rend.}} e^{-iky'\sin\theta} dy'$$

Saco afuera de la integral lo que no depende de la variable de integración



Las rendijas positivas:

$$\left\{\begin{matrix} \frac{d}{2}-\frac{a}{2} \to \frac{d}{2}+\frac{a}{2} \\ \frac{3d}{2}-\frac{a}{2} \to \frac{3d}{2}+\frac{a}{2} \\ \frac{5d}{2}-\frac{a}{2} \to \frac{5d}{2}+\frac{a}{2} \\ \vdots \end{matrix}\right\}$$

Las rendijas negativas:

{ Idem pero reemplazando todas las d por $-d$ }

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)d - \frac{a}{2} \to \left(m+\frac{1}{2}\right)d + \frac{a}{2}$$

$$m = \underbrace{-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, -\frac{N}{2}+2, \dots, -1}_{N/2 \text{ rendijas inferiores}}, \underbrace{0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-2, \frac{N}{2}-1}_{N/2 \text{ rendijas superiores}}$$

Comentario: Estoy asumiendo N par porque queda más lindo para escribir, pero es irrelevante que lo sea o no. Va a dar lo mismo si N es impar.

$$E(y,t) = \epsilon_0 e^{i(kR-\omega t)} \left\{ \int^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta} dy' + \int^{\frac{3d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta} dy' + \cdots \right.$$

$$E(y,t)=\epsilon_0 e^{i(kR-\omega t)}\Bigg\{\underbrace{\int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta}dy' + \int_{\frac{3d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{3d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta}dy' + \cdots}_{\text{Rendijas superiores}}$$

$$\underbrace{\cdots+\int_{-\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta}dy' + \int_{-\frac{3d}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{3d}{2}+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta}dy'}_{\text{Rendijas inferiores}}\Bigg\}$$

$$E(y,t)=\epsilon_0 e^{i(kR-\omega t)}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\int_{(m+\frac{1}{2})d-\frac{a}{2}}^{(m+\frac{1}{2})d+\frac{a}{2}} e^{-iky'\sin\theta}dy'$$

El índice de la sumatoria (m) aparece en los límites de integración.
No quiero eso porque implica que cada una de mis N integrales es distinta.
Entonces hago un cambio de variables:

$$\begin{cases} y''=y'-(m+\frac{1}{2})d \quad \rightarrow y'=y''+(m+\frac{1}{2})d \\ dy''=dy' \\ \text{Si } y'=(m+\frac{1}{2})d\pm\frac{a}{2} \Rightarrow y''=\cancel{(m+\frac{1}{2})d}\pm\frac{a}{2}-\cancel{(m+\frac{1}{2})d}=\pm\frac{a}{2} \end{cases}$$ $\longrightarrow$ Desapareció m como quería!

$$E(y,t)=\epsilon_0 e^{i(kR-\omega t)}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik\left(y''+(m+\frac{1}{2})d\right)\sin\theta}dy''$$

Saco de la integral todo lo que no depende de la variable de integración y saco afuera de la sumatoria lo que no depende de m:

$$E(y,t)=\underbrace{\epsilon_0 e^{i(k[R-\frac{d}{2}\sin\theta]-\omega t)}}_{=\tilde{E}_0}\underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iky''\sin\theta}dy''}\cdot\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\underbrace{\left\{e^{-ikd\sin\theta}\right\}^m}_{\text{Usé propiedades de exponenciales}}$$

Es la difracción de una única rendija!!
(Cuenta muy parecida a la de dos rendijas)

Difracción de una rendija:

$$\int^{\frac{a}{2}} e^{-iky''\sin\theta}dy'' \qquad e^{-iky''\sin\theta}\Big|^{\frac{a}{2}} \qquad e^{-ik\frac{a}{2}\sin\theta}-e^{ik\frac{a}{2}\sin\theta}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iky''\sin\theta}\,dy'' = \left.\frac{e^{-iky''\sin\theta}}{-ik\sin\theta}\right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{e^{-ik\frac{a}{2}\sin\theta} - e^{ik\frac{a}{2}\sin\theta}}{-ik\sin\theta}$$

$$= \frac{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}{-2i\alpha/a} = a\,\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = a\,\mathrm{sinc}(\alpha)$$

$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$: Seno cardinal

$\alpha = k\frac{a}{2}\sin\theta$

$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

Se deduce de que $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$$\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \{\underbrace{e^{-ikd\sin\theta}}_{r}\}^m \longleftrightarrow S = \sum_{m=0}^{N} r^m \rightarrow \text{Serie geométrica}$$

Parecido a

Paréntesis: Serie geométrica

$S = \sum_{m=0}^{N} r^m = 1 + r + r^2 + \dots + r^N$

$rS = r + r^2 + r^3 + \dots r^{N+1}$

$\Rightarrow rS - S = S(r-1) = r^{N+1} - 1$

$\Rightarrow \boxed{S = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}}$

Para poder usar la serie geométrica necesito que la suma empiece a correr desde cero.
Entonces, hago un cambio de variables:

$p = m + \frac{N}{2} \rightarrow m = p - \frac{N}{2}$

Si $m = -\frac{N}{2} \Rightarrow p = -\frac{N}{2} + \frac{N}{2} = 0$

Si $m = \frac{N}{2} - 1 \Rightarrow p = \frac{N}{2} - 1 + \frac{N}{2} = N-1$

$$\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \{e^{-ikd\sin\theta}\}^m = \sum_{p=0}^{N-1} \{e^{-ikd\sin\theta}\}^{p-\frac{N}{2}} = e^{ikd\frac{N}{2}\sin\theta} \underbrace{\sum_{p=0}^{N-1} \{e^{-ikd\sin\theta}\}^p}_{\text{Serie geo!}}$$

$$= e^{ikd\frac{N}{2}\sin\theta}\,\frac{e^{-ikdN\sin\theta}-1}{e^{-ikd\sin\theta}-1} = e^{i\gamma/2}\,\frac{e^{-iN\gamma}-1}{e^{-i\gamma}-1}$$

$\gamma = kd\sin\theta$

Juntando todo:

$$E(y,t) = \tilde{E}_0\, a\cdot\mathrm{sinc}(\alpha)\cdot e^{i\gamma/2}\,\frac{e^{-iN\gamma}-1}{e^{-i\gamma}-1}$$

$$E(y,t)=\tilde{E}_0\, a\cdot \text{sinc}(\alpha)\cdot e^{i\gamma/2}\,\frac{e^{-iN\gamma}-1}{e^{-i\gamma}-1}$$

$$\frac{e^{-iN\gamma/2}}{e^{-i\gamma/2}}\cdot\frac{e^{-iN\gamma/2}-e^{iN\gamma/2}}{e^{-i\gamma/2}-e^{i\gamma/2}}$$

Multiplico por -1 arriba y abajo. Divido por 2i arriba y abajo.

$$\frac{\left(\frac{e^{iN\gamma/2}-e^{-iN\gamma/2}}{2i}\right)}{\left(\frac{e^{i\gamma/2}-e^{-i\gamma/2}}{2i}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{N\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$E(y,t)=\tilde{E}_0\, a\cdot \text{sinc}(\alpha)\cdot e^{i\gamma\left(1-\frac{N}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\begin{cases}\alpha = k\frac{a}{2}\sin\theta\\ \gamma = k d \sin\theta\end{cases}$$

Defino $\delta=\frac{\gamma}{2}$:

$$E(y,t)=\tilde{E}_0\, a\cdot \text{sinc}(\alpha)\cdot \underbrace{e^{i\cdot 2\delta\left(1-\frac{N}{2}\right)}}_{(\star)}\cdot\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}$$

$I(y,t)=E(y,t)\cdot E^{*}(y,t)$ → Cuando haga esto las exponenciales complejas se transformas en 1. Por esto también, parte de de Eo moño va a desaparecer.

$(\star)$ desaparece

$\tilde{E}_0=\epsilon_0\, e^{i(k[R-\frac{d}{2}\sin\theta]-\omega t)}$ se transforma en ϵ_0^2

Pierdo la dependencia temporal

$$\rightarrow I(y)=\epsilon_0^2\, a^2\cdot \text{sinc}^2(\alpha)\cdot\frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}$$

→ I_0

$$\boxed{I(y)=I_0\cdot \text{sinc}^2(\alpha)\cdot\frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}}$$

$$\begin{cases}\delta = k\frac{d}{2}\sin\theta\\ \alpha = k\frac{a}{2}\sin\theta\\ \sin\theta\simeq\frac{y}{D}\end{cases}$$

Difracción: Depende del ancho de la rendija

Interferencia: Depende de la separación entre rendijas y de la depende del ancho de la rendija

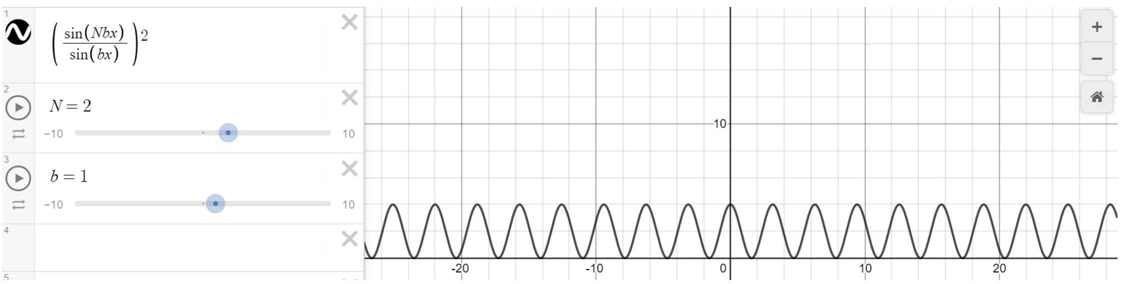
depende de la separación entre rendijas y de la cantidad (N)

COMENTARIO:

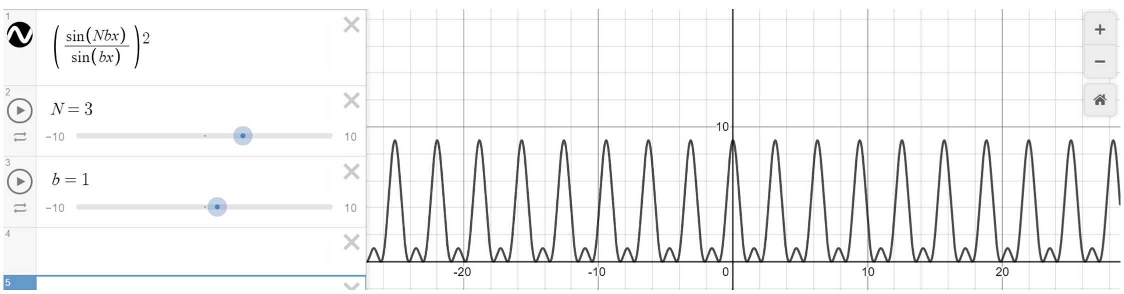
$$\text{Si } N=2 \Rightarrow \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)} = \frac{\sin^2(2\delta)}{\sin^2(\delta)} = \frac{[2\cancel{\sin(\delta)}\cos(\delta)]^2}{\cancel{\sin^2(\delta)}} = 4\cos^2(\delta)$$

→ Recupero el resultado de interferencia de dos rendijas

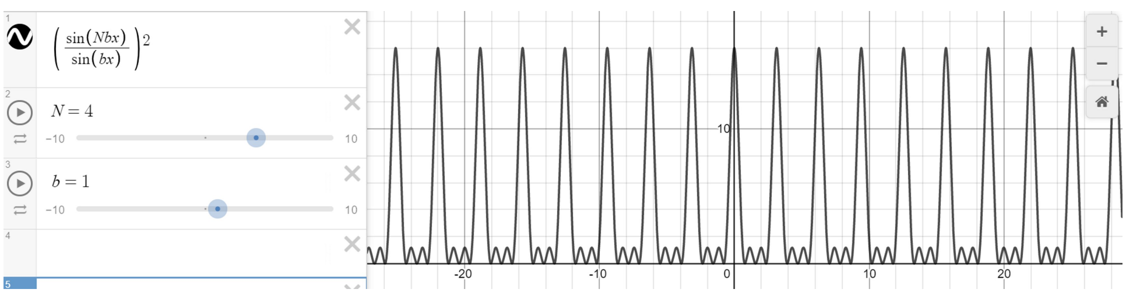
Primero grafico SOLO la parte de INTERFERENCIA:



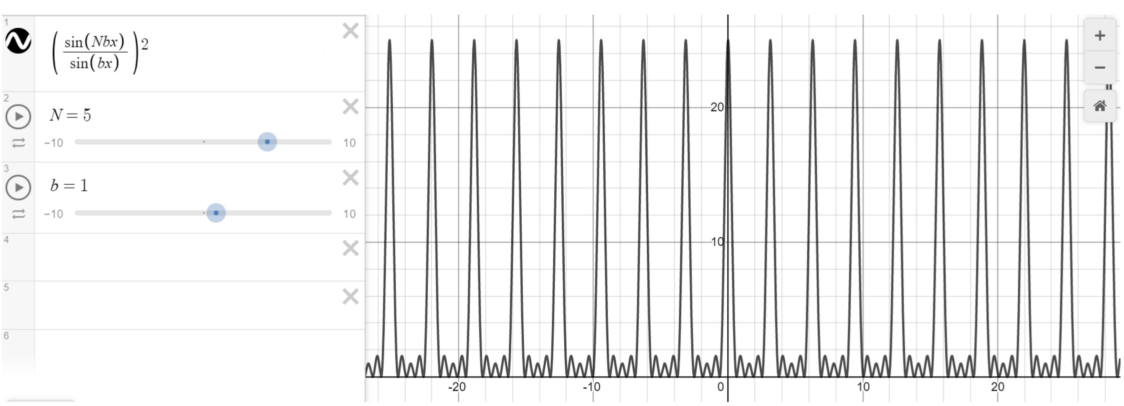
N = 2



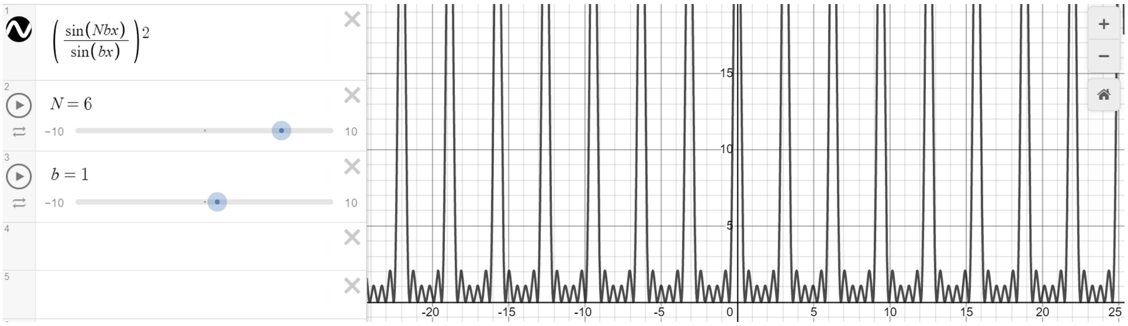
N = 3



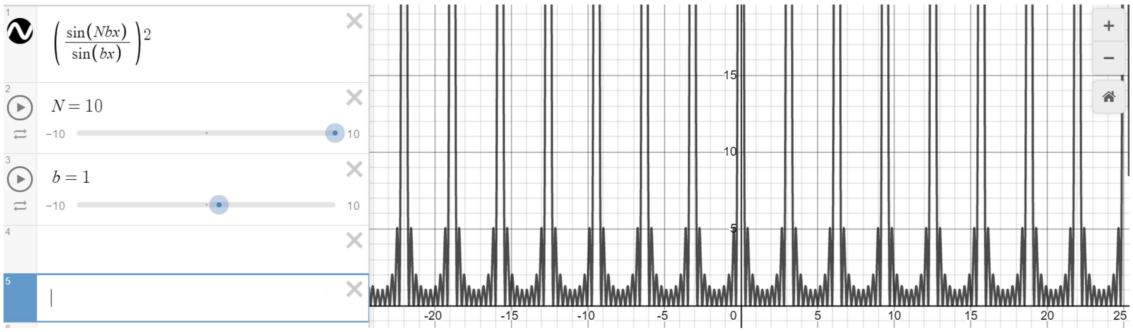
N = 4



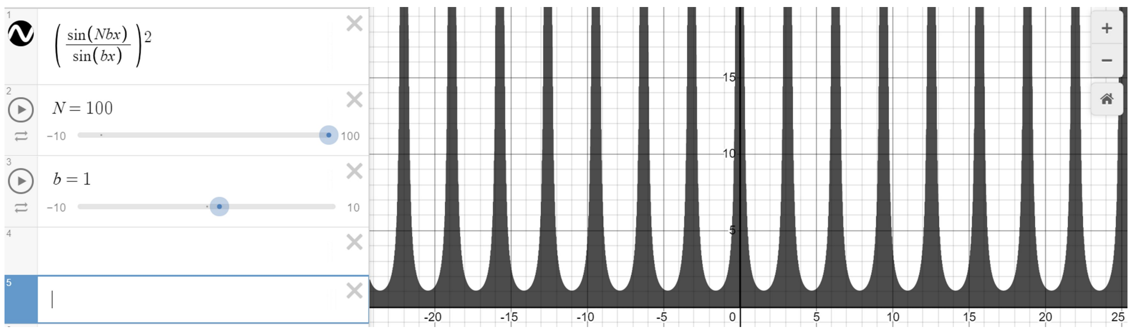
N = 5



N = 6

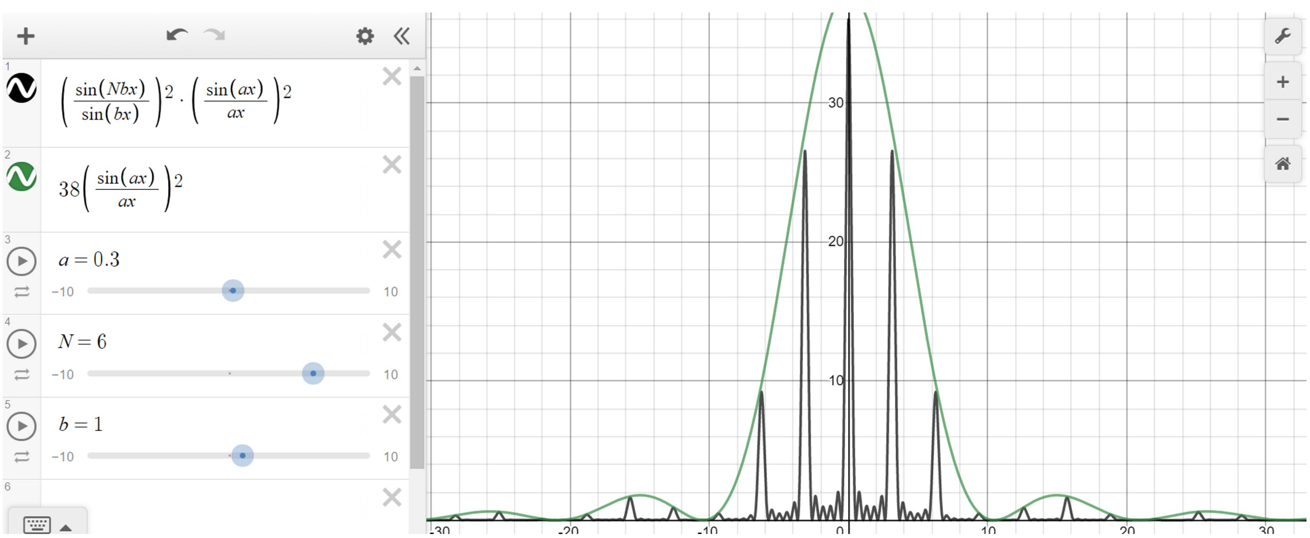


N = 10

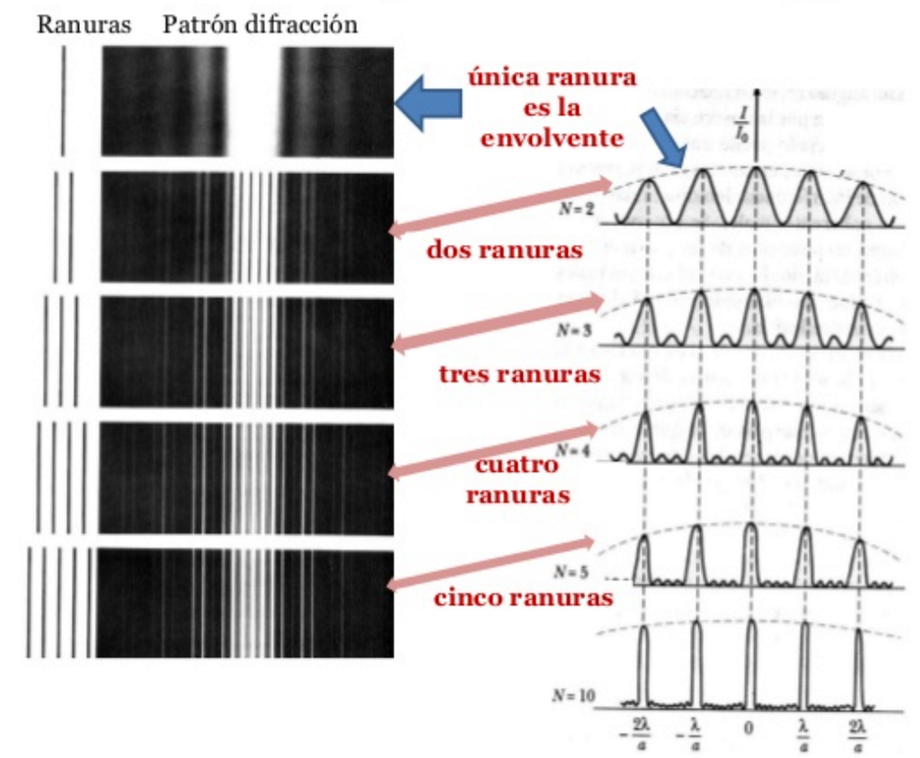


N = 100

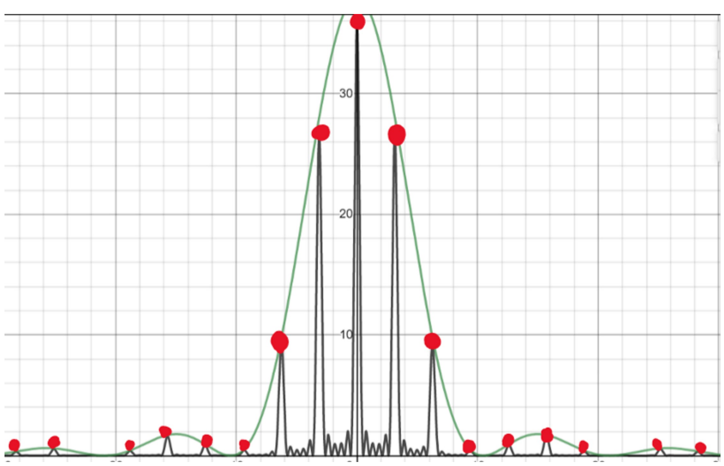
Ahora grafico la INTENSIDAD completa:



Ignoren el 38 que acompaña al seno cardinal. Es solo para que se vea que el seno cardinal modula a la figura de interferencia.



(b) Calcule la posición angular de las líneas espectrales y su intensidad. ¿Las líneas espectrales corresponden a los máximos de interferencia o de difracción? Calcule la separación angular entre dos líneas consecutivas.



Máximos principales de interferencia ---> Órdenes de interferencia ---> Líneas espectrales:
Son las líneas que se ven claramente al hacer esto experimentalmente.

NO veo los máximos de difracción!
La curva de difracción solo modula la curva de interferencia, que es la que realmente veo.

→ Todos los máximos que NO marqué los llamamos máximos secundarios.

Posición de las líneas espectrales:

Parto de $\left(\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}\right)^2 \rightarrow$ Las líneas espectrales se dan cuando $\begin{cases} \sin(N\delta)=0 \rightarrow N\delta = m\pi \text{ con } m\in\mathbb{Z} \\ \sin(\delta)=0 \rightarrow \delta = n\pi \text{ con } n\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$$\delta = k\frac{d}{2}\sin\theta = n\pi$$

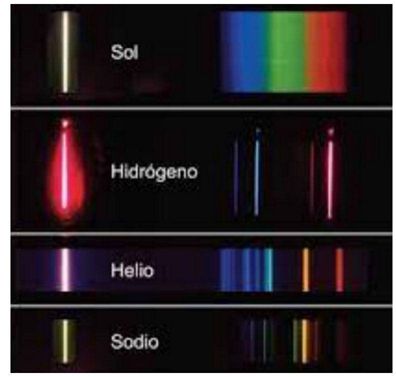
$$\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda}\cdot\frac{d}{\cancel{2}}\sin\theta = n\cancel{\pi} \rightarrow \sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

$$\cancel{\frac{4\pi}{\lambda}}\cdot\frac{a}{\cancel{2}}\sin\theta = n\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

$$N\delta = m\pi \rightarrow N\cdot\underbrace{n\pi}_{\delta} = m\pi \rightarrow m = N\cdot n \rightsquigarrow \text{Es un entero } \checkmark$$

$\rightarrow$ Líneas espectrales: $\boxed{\theta \simeq \sin\theta = \frac{n\lambda}{d} \quad \text{con } n\in\mathbb{Z}}$

Puedo usar esta dependencia con lambda, por ejemplo, para separar las distintas longitudes de onda que componen a una fuente luminosa.



Intensidad de las líneas espectrales:

$$\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} = \frac{N\overbrace{\cos(N\delta)}^{\pm 1}}{\underbrace{\cos(\delta)}_{\pm 1}} = \pm N \rightarrow \boxed{\left(\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}\right)^2 = N^2 \text{ en las líneas espectrales}}$$

Indeterminación $0/0$ L'hopital

Me conviene agregar más rendijas para poder ver mejor las líneas espectrales.

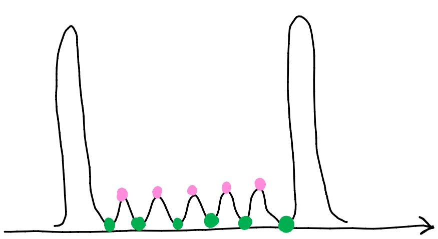
El resto de los términos de la intensidad no los miro porque no son relevantes en este caso.

Separación angular entre dos líneas espectrales consecutivas:

$$\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n \simeq \frac{(n+1)\lambda}{d} - \frac{n\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d}$$

$$\boxed{\Delta\theta \simeq \frac{\lambda}{d}}$$

(c) ¿Cuántos mínimos de interferencia hay entre dos líneas espectrales consecutivas? ¿Cuántos máximos secundarios hay entre dichas líneas?



Solo con el dibujo ya podemos decir que entre dos líneas espectrales consecutivas va haber *1 máximo secundario menos que la cantidad de mínimos*.

Busquemos los mínimos de interferencia:

$$\text{Pido} \begin{cases} \sin(N\delta) = 0 \longrightarrow N\delta = m\pi \quad \text{con } m \in \mathbb{Z} \\ \sin(\delta) \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \delta = \frac{m}{N}\pi \Rightarrow$ Pido que $\frac{m}{N}$ no sea entero para que $\sin(\delta) \neq 0$

$$\Rightarrow k\frac{d}{2}\sin\theta = \frac{m}{N}\pi \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda}\frac{d}{\cancel{2}}\sin\theta = \frac{m}{N}\cancel{\pi} \Rightarrow \sin\theta = \frac{m}{N}\cdot\frac{\lambda}{d} \quad \text{con } \frac{m}{N} \notin \mathbb{Z}$$

Entre cualquier par de líneas espectrales voy a tener la misma cantidad de mínimos.

$\Rightarrow$ Pido $0 < \sin\theta < \frac{\lambda}{d}$

(Acuérdense que las líneas espectrales están en $\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$)

$$\Rightarrow 0 < \frac{m}{N}\cdot\frac{\lambda}{d} < \frac{\lambda}{d} \Rightarrow 0 < \frac{m}{N} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{N} = \left\{ \cancel{0}, \underbrace{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{(N-1)}{N}}_{N-1 \text{ mínimos}}, \cancel{\frac{N}{N}} \right\}$$

En m/N = 0 y en m/N = 1 estoy en la condición de máximo.

(Porque tanto $\sin(N\delta)$ como $\sin(\delta)$ son cero)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hay (N-1) mínimos entre dos líneas espectrales consecutivas.}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hay (N-2) máximos secundarios entre dos líneas espectrales consecutivas.}}$

(d) Calcule el ancho angular de las líneas espectrales.

$$\frac{m}{N} = \ldots, \underset{\text{min}}{\frac{(N-2)}{N}}, \overbrace{\underset{\text{min}}{\frac{(N-1)}{N}}, \underset{\substack{\text{max} \\ \text{Línea espectral}}}{\frac{N}{N}}, \underset{\text{min}}{\frac{(N+1)}{N}}}^{\text{Ancho línea espectral}}, \underset{\text{min}}{\frac{(N+2)}{N}}, \ldots$$

- El ancho de una línea espectral lo puedo calcular como la diferencia entre el mínimo en m/N = (N-1)/N y el mínimo en m/N = (N+1)/N.
- O sea que es el doble de la distancia entre mínimos.

$$\Rightarrow \text{Ancho línea espectral}: \Delta\theta = \theta_{\frac{N+1}{N}} - \theta_{\frac{N-1}{N}} \simeq \sin\theta_{\frac{N+1}{N}} - \sin\theta_{\frac{N-1}{N}} = \frac{N+1}{N}\cdot\frac{\lambda}{d} - \frac{N-1}{N}\cdot\frac{\lambda}{d} = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Mínimos : $\sin\theta = \frac{m}{N}\cdot\frac{\lambda}{d}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\theta \simeq \frac{2\lambda}{Nd}}$$

Me conviene agregar más rendijas para que las líneas espectrales sean más angostas y me sea más fácil distinguir una de la otra.

Doblete de sodio:

Son dos longitudes de onda MUY parecidas (fíjense que los colores son prácticamente indistinguibles).

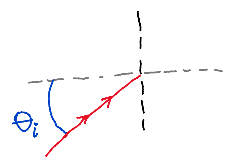
Entonces, para podes ver ambas líneas (distinguir una de la otra) necesito que sean muy finitas. Una forma de hacerlo es usando un N muy grande.

(e) Si la incidencia sobre la red no es normal, ¿cómo cambia la figura de interferencia-difracción?

Reemplazo en todos lados $\sin\theta$ por $\sin\theta - \sin\theta_i$

θ_i: Ángulo de incidencia

(Lo vimos con Guillem la clase pasada)

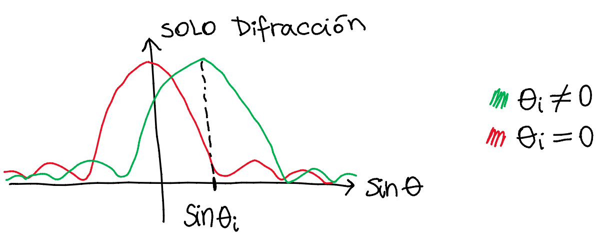


$$I(y) = I_0 \cdot \text{sinc}^2(\alpha) \cdot \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)} \quad \begin{cases} \delta = k\frac{d}{2}\sin\theta \\ \alpha = k\frac{a}{2}\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \delta = k\frac{d}{2}(\sin\theta - \sin\theta_i) \\ \alpha = k\frac{a}{2}(\sin\theta - \sin\theta_i) \end{cases}$$

El patrón de interferencia - difracción se mueve *rígidamente* en una cantidad $\sin\theta_i$

Entonces:

- NO cambian las distancias entre líneas
- NO cambian los anchos de líneas
- NO cambian la cantidad de mínimos, ni de máximos principales ni secundarios



Ejercicio 8

Acuérdense que $\sin\theta \simeq \frac{y}{D}$

D : Distancia de las rendijas a la pantalla