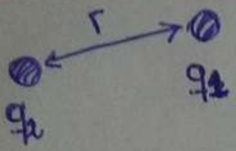
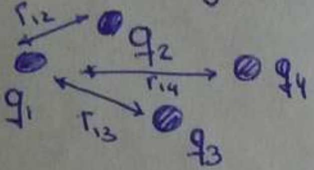
Fuerza de Coulomb



$$|\bar{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \; ; \quad \bar{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}_{12} \quad \text{con } \hat{r}_{12} = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}$$

debido a q_2

Obs: las cargas "fuente" siempre van restando en $\hat{r}_{12}$



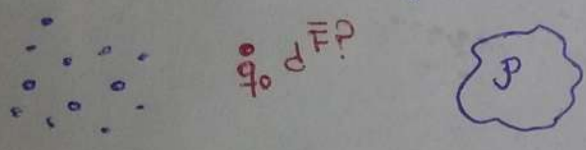
$$\bar{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_2}{r_{12}^2}\frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_2)}{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|} + \frac{q_3}{r_{13}^2}\frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_3)}{|\bar{r}_1-\bar{r}_3|} + \frac{q_4}{r_{14}^2}\frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_4)}{|\bar{r}_1-\bar{r}_4|}\right]$$

con $r_{12} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$, $r_{13} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_3|$, $r_{14} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_4|$

Usamos el principio de superposición

Campo eléctrico

Idea: conocer la fuerza que "sentiría" una carga eléctrica q_0 debido a distribución discreta (cargas aisladas) ó continua (objeto cargado).



"A mi decime cual es la fuerza RESULTANTE sobre la carga q_0. No me interesa la fuerza que le hace cada elemento que compone la distribución"

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{r_{0j}^2}\hat{r}_{0j} \quad \text{con } \hat{r}_{0j} = \frac{\bar{r}_0 - \bar{r}_j}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_j|}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\bar{r}')\,dv'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}$$ ← muchas veces es complicado resolver esto

Obs: las expresiones anteriores valen para todo cuerpo cargado. Es decir, no importa cuan complicado sea el problema. Si conocemos ρ podemos calcular $\bar{E}$ SIEMPRE. Pero, a veces, hay formas mas simples de conocer $\bar{E}$

Ley de Gauss

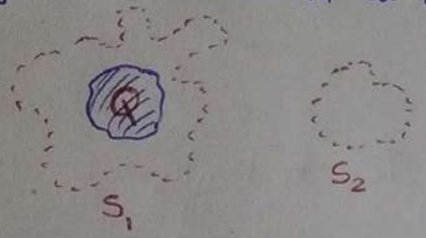
$$\oint_{Sup} \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_{ENC}}{\epsilon_0}$$

Q_{ENC} → carga encerrada en Sup

Sup → superficie CERRADA

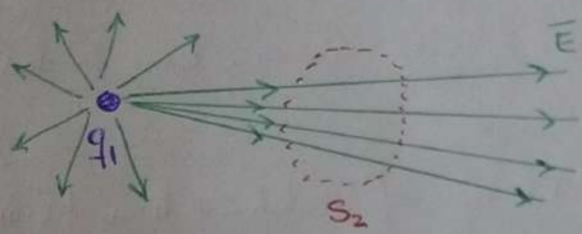
$d\bar{A}$ → apunta "hacia afuera" de la superficie

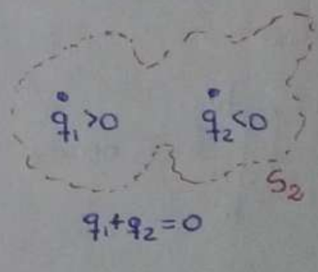
El flujo del campo eléctrico $\bar{E}$ a través de la superficie S es proporcional a la carga NETA encerrada en la misma



$$\oint_{S_1} \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad ; \quad \oint_{S_2} \bar{E} \cdot d\bar{A} = 0$$

Obs: Ojo! No significa que sobre la superficie S_2 el campo $\bar{E}$ es cero. Lo que significa es que, debido a que no encierra ninguna carga neta, el FLUJO eléctrico es cero (lo que entra es lo mismo que lo que sale)





Vamos a usar la ley de Gauss para conocer $\bar{E}$. Para eso habrá que elegir una superficie. La elección de la misma es arbitraria. Pero, suele elegirse de manera tal que la simetría de la distribución dé, aunque sea en una parte de la superficie, un campo eléctrico constante, que pueda factorizarse fuera de la integral

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{A} \longrightarrow E \oint_S dA = ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \leftarrow \text{Queremos hacer esto.}$$

Ejercicio 13

En cada uno de los casos siguientes determine, explotando la simetría de la configuración de cargas, cuál será la dirección del campo eléctrico y de cuáles coordenadas dependerán sus componentes. Utilizando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico en todo el espacio, y a partir de éste calcule el potencial electrostático. Grafique las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

(a) Un hilo delgado infinito con densidad lineal de carga uniforme λ.

(b) Un cilindro circular infinito de radio R, cargado uniformemente en volumen con densidad volumétrica de carga ρ.

(c) Un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme σ.

(d) Una esfera de radio R con densidad uniforme ρ.

(e) Una esfera de radio R con densidad de carga $\rho = Ar^n$ (con A, n = constantes)

Nota: Observe que en los tres primeros casos no se puede tomar el cero de potencial en el infinito ni se lo puede calcular mediante la integral: $V(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + cte$ ya que ella no está definida para esas distribuciones de carga.

Ejercicio 13

a)

$\lambda = \frac{dq}{ds}$

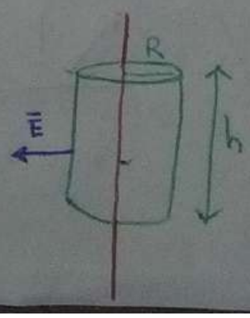
¿Dirección?

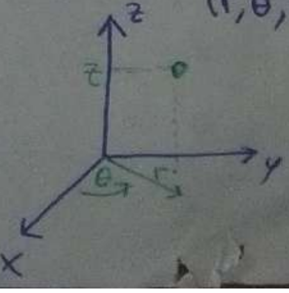
¿De qué coordenada depende?

¿Simetría? Cilíndrica

Desde arriba

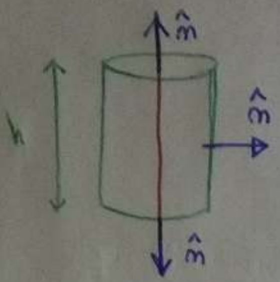
$\lambda > 0$





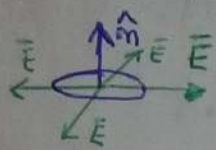
(r, θ, z)

$\bar{E} = E(r)\,\hat{r}$.

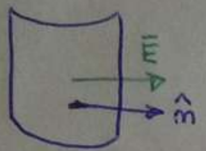


Nuestra superficie CERRADA S se compone ~~por~~ de 3 sub superficie, las dos tapas (S_{Sup} y S_{INF}) y el costado ó lateral (S_{LAT})

Veamos que pasa con el flujo en cada superficie



$\hat{n} \cdot \bar{E} = 0$ por ser perpendiculares.



$$\hat{n} \cdot \bar{E} = \underbrace{|\hat{n}|}_{1}\,|\bar{E}|\,\overbrace{\cos\gamma}^{1 \text{ por ser paralela}} = |\bar{E}| = E$$. Por lo tanto,

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{A} = \int_{S_{Sup}} \bar{E} \cdot d\bar{A} + \int_{S_{INF}} \bar{E} \cdot d\bar{A} + \int_{S_{LAT}} \bar{E} \cdot d\bar{A} = 0 + 0 + \int_{S_{LAT}} \bar{E} \cdot d\bar{A} = \int_{S_{LAT}} \bar{E} \cdot d\bar{A} = \int_{S_{LAT}} \bar{E} \cdot \hat{n}\, dA$$

$d\bar{A} = \hat{n}\, dA$

$$= \int_{S_{LAT}} E\, dA$$.

$dA \Rightarrow$  $dA = R\,d\theta\,dz$ ← debe tener unidad de superficie

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2} E\,R\,d\theta\,dz = E R \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz = E R\, \theta\Big|_0^{2\pi}\, z\Big|_{-h/2}^{h/2} = E R\, 2\pi\, h \rightarrow \oint_S \bar{E} \cdot dA = \underbrace{2\pi R h}_{\text{Superficie del cilindro (lateral)}} E$$

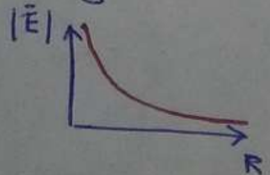
Pero falta calcular el termino $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV$$ ← volumen delimitado por S

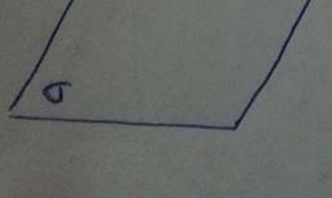
$$\int_V \rho\, dV \longrightarrow \int \lambda\, \overset{\text{diferencial de longitud}}{d\ell} = \lambda \int_{-h/2}^{h/2} d\ell = \lambda h$$

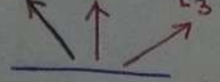
Entonces $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$. Por lo tanto, $\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{A} = 2\pi R h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi R}$

Finalmente $\boxed{\bar{E} = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi R}\,\hat{r}}$



c)

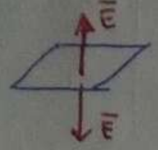




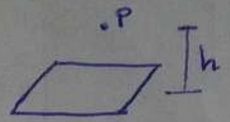
vista de perfil

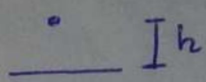
$\sigma = \frac{dq}{dA}$

Por simetría $\bar{E}$ debe ser perpendicular al plano de carga



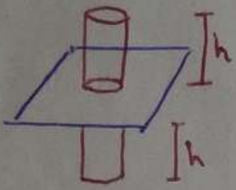
Además, deberá depender solo de la altura de un punto P al plano



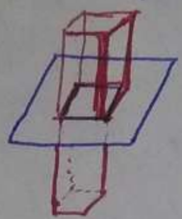


Elijamos S tal que una o más caras sean perpendiculares a $\bar{E}$

Ejemplo



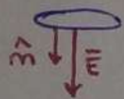
Cilindro de radio R y altura 2h



Prisma

En ambos casos $\bar{E}\cdot d\bar{A}$ es distinto de cero en las tapas superior e inferior.
Y en c/u de las tapas E vale lo mismo. Entonces sale fuera de la integral. Veamos

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \int_{\text{TAPA INF}} \bar{E}\cdot d\bar{A} + \int_{\text{TAPA SUP}} \bar{E}\cdot d\bar{A} + \underbrace{\int_{\text{LATERAL}} \bar{E}\cdot d\bar{A}}_{=0}$$



Si coloco a las tapas a la misma distancia "h" del plano, entonces

$$\int_{\text{TAPA INF}} \bar{E}\cdot d\bar{A} = \int_{\text{TAPA SUP}} \bar{E}\cdot d\bar{A} = \int_{\text{TAPA}} \bar{E}\cdot d\bar{A}$$

defino esto

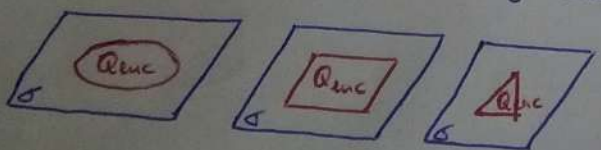
Entonces $\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = 2\int_{\text{TAPA}} \bar{E}\cdot d\bar{A} = 2\int_{\text{TAPA}} E\, dA = 2E\int_{\text{TAPA}} dA = 2EA$

$\bar{E}\cdot d\bar{A} = |\bar{E}|dA\,\underbrace{\cos\gamma}_{1}$

E es constante en la tapa porque todos sus puntos están a la misma distancia del plano

área de la tapa.

Por otro lado, ¿cuánto vale la carga encerrada por S?



$Q_{enc} = \sigma A$ ya que $Q_{enc} = \int \rho\, dv = \int \sigma\, dA$
pero σ es uniforme $\rightarrow \int \sigma\, dA = \sigma\int dA = \sigma A$

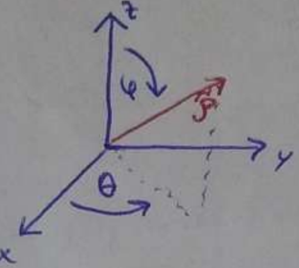
Por lo tanto, $\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = 2EA = \dfrac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\bar{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}}$

Obs: A diferencia del caso anterior, el campo eléctrico no depende de la distancia al plano.

d)

ρ uniforme

$\rho = \frac{dq}{dV}$ Simetría esférica $\rightarrow$ Usemos coordenadas esféricas $(\tilde{\rho}, \theta, \varphi)$



Por simetría E deberá sólo depender de $\tilde{\rho}$ (la distancia al centro de la esfera) y deberá tener una dirección radial (en $\hat{\rho}$) $\rightarrow$ $\bar{E} = E(\tilde{\rho})\,\hat{\rho}$

S

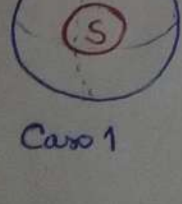
$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{A} = \oint_S E\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\, dA = \oint_S E\, dA = E\oint_S dA = E\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \tilde{\rho}^2 \,\mathrm{sen}(\varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

es constante en la superficie

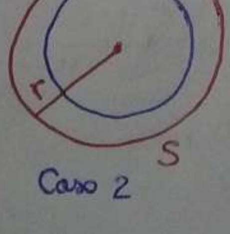
$$= E\tilde{\rho}^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\varphi)\, d\varphi = E\tilde{\rho}^2 (2\pi)\left(-\cos(\varphi)\right)\Big|_0^{\pi} = E\tilde{\rho}^2\, 2\pi \underbrace{(-(-1-1))}_{2} = \underbrace{4\pi\tilde{\rho}^2}_{\text{superficie de la esfera de radio } \tilde{\rho}} E$$

$\rightarrow \oint_S \bar{E}\cdot d\bar{A} = 4\pi\tilde{\rho}^2 E$; Sea $\tilde{\rho} = r \rightarrow$ $\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = 4\pi r^2 E$

¿Cual es la carga encerrada por S? Depende del tamaño de S. Es decir, si estoy dentro de la esfera de radio R o fuera de ella



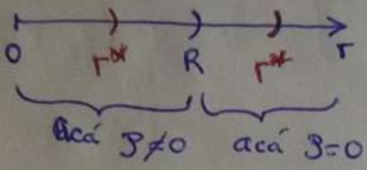
Caso 1



Caso 2

radio de S

$$Q_{enc} = \int \rho\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int \rho\, r^2\, \mathrm{sen}(\varphi)\, dr\, d\varphi\, d\theta$$



$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi}_{4\pi} \int_0^{r^*} \rho\, r^2\, dr = 4\pi \int_0^{r^*} \rho r^2\, dr$$

$$\rho = \begin{cases} \rho & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

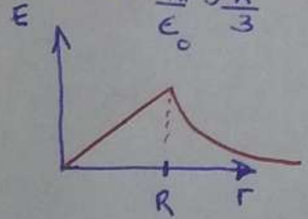
Caso 1 $\quad 4\pi \int_0^{r^*} \rho r^2 dr = 4\pi \left.\dfrac{\rho r^3}{3}\right|_0^{r^*} = 4\pi \dfrac{\rho r^3}{3}$

Caso 2 $\quad 4\pi \int_0^{r^*} \rho r^2 dr = 4\pi \left[\int_0^R \rho r^2 dr + \underbrace{\int_R^{r^*} \rho r^2 dr}_{0 \text{ porque } \rho = 0} \right] = 4\pi \dfrac{\rho R^3}{3}$

$$\rightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow 4\pi r^2 E = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{\epsilon_0} \dfrac{\rho r^3}{3} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{4\pi}{\epsilon_0} \dfrac{\rho R^3}{3} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Entonces,

$$\boxed{E = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \end{cases}}$$

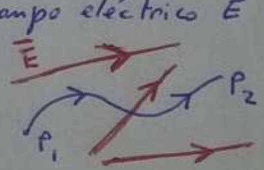


Potencial electrostático

$$\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

← es el trabajo por unidad de carga que realiza el campo eléctrico $\bar{E}$ al mover una carga q_0 de P_1 a P_2

escalar!



a) $\bar{E} = \dfrac{\lambda \hat{r}}{\epsilon_0 2\pi r}$

$$-\int_{P_1}^{P_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda \hat{r}}{\epsilon_0 2\pi r} \cdot \hat{r}\, dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r} dr$$

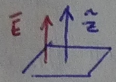
la componente $\perp$ de $d\bar{l}$ no contribuye al potencial porque $\bar{E} \cdot d\bar{l}_{\perp} = 0$

$$= -\frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi} \left[\ln(r_2) - \ln(r_1) \right] \Rightarrow \boxed{\phi_{21} = -\frac{\lambda \ln(r)}{\epsilon_0 2\pi} + cte}$$

con $cte = \dfrac{\lambda \ln(r_1)}{\epsilon_0 2\pi}$

$d\bar{l} = d\bar{l}_{\parallel} + d\bar{l}_{\perp}$ al campo $\bar{E}$

c) $\bar{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$

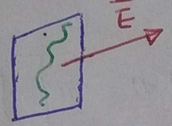


$\phi_{21} = \int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\cdot\hat{z}\,dz = \int_{z_1}^{z_2}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(z_2 - z_1)$

$\Rightarrow \boxed{\phi_{21} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + cte}$

Superficies equipotenciales

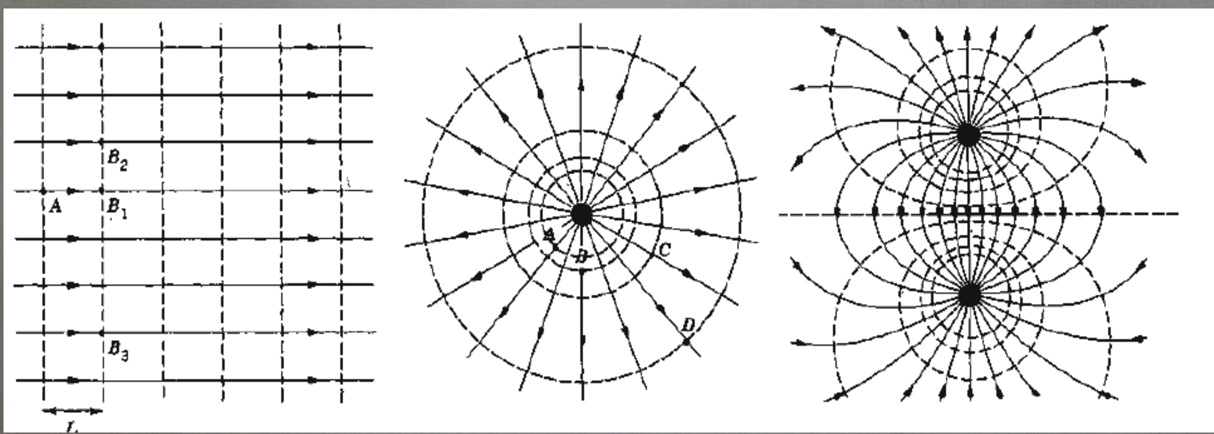
$\phi_{21} = \int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l}$



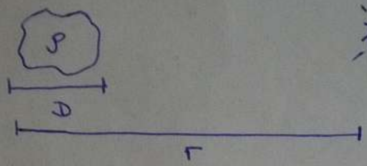
plano $\perp$ a $\bar{E}$

Si me muevo por ∿ $\bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 \rightarrow \phi_{21} = 0$

Es decir, todos los puntos de la curva tienen el mismo potencial. Por lo tanto, la familia de superficies que unan puntos que tengan el mismo potencial eléctrico se denominan superficies equipotenciales.



Expansión multipolar de una distribución estática de carga



$r >> D$ "lo veo desde muy lejos".

¿Qué es lo que veo?

$$V(\bar r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}\, dV' = V_M(\bar r)+V_D(\bar r)+V_C(\bar r)+\dots$$

hago Taylor en $\bar r >> \bar r'$. Es decir, asumo que $\bar r' \sim \bar 0$ (está en el origen de coordenadas)

Con Momento monopolar $V_M(\bar r) = \frac{Q}{r}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $Q = \int_{V'} \rho(\bar r')\, dV' = \sum_i q_i$

El momento monopolar es equivalente al que crearía una carga Q (carga neta del sistema) en el origen de coordenadas

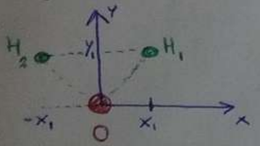
Potencial dipolar eléctrico $V_D(\bar r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\bar p\cdot\hat r}{r^2}$ con $\bar p = \int_{V'} \bar r' \rho(\bar r')\, dV'$ = momento dipolar eléctrico $= \sum_i q_i \bar r_i'$

Ejercicio 16

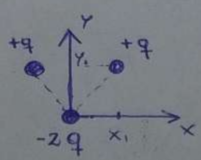
Ejercicio 16

Una molécula de agua tiene su átomo de oxígeno en el origen y los núcleos de hidrógeno en $\mathbf{x} = (\pm 0.077\,\text{nm}; 0.058\,\text{nm})$. Si los electrones del hidrógeno se transfieren completamente al átomo de oxígeno, ¿cuál sería el momento dipolar de la molécula? Compare con el valor experimental (esta caracterización de los enlaces químicos del agua como totalmente iónicos sobrestima el momento dipolar).

Agua $\rightarrow H_2O$



$O = (0,0)$
$H = (\pm x_1, Y_1)$



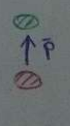
$q = |q|$

$$\bar p = \sum_i q_i \bar r_i' = -2q\underbrace{\bar 0}_{\text{oxígeno}} + \underbrace{q(x_1,Y_1)}_{H_1} + \underbrace{q(-x_1,Y_1)}_{H_2}$$

$$= q(x_1,Y_1)+q(-x_1,Y_1) = q(0,2Y_1) = 2q(0,Y_1) = 2qY_1(0,1) = 2qY_1\hat y \rightarrow \boxed{\bar p = 2qY_1\hat y}$$

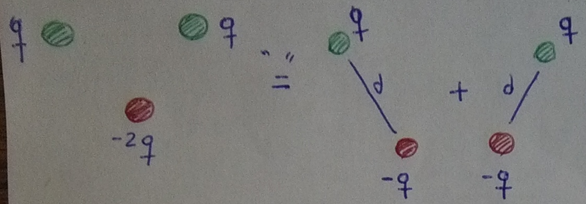
$q^{e^-} = -1{,}6\times10^{-19}\,C$, $Y_1 = 0{,}058\,nm = 0{,}058\times10^{-9}\,m = 58\times10^{-12}$

$\rightarrow |\bar p| = 2q^{e}Y_1 = 1{,}856\times10^{-29}\,Cm$; $|\bar p_{real}| = 6{,}2\times10^{-30}\,Cm$

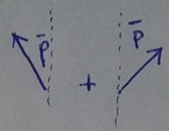


desde muy lejos vería esto.

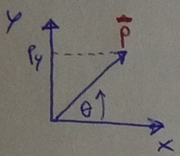
Otra forma más fácil de resolver esto es la siguiente



= Suma de dos dipolos de intensidad $|\bar{p}| = qd$



Si los sumo, sólo "sobrevive" la componente vertical $\longrightarrow$ $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 2\,\bar{p}_{vertical} = 2\bar{p}_y$



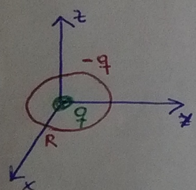
$p_y = |\bar{p}|\,\text{sen}\,\theta \longrightarrow \bar{p}_{TOTAL} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 2\bar{p}_y = 2|\bar{p}_y|\,\hat{y} = 2q\underbrace{d\,\text{sen}\,\theta}_{y_1}\,\hat{y} = 2qy_1\,\hat{y}$

Ejercicio 17

Un anillo de radio R está cargado uniformemente con una carga total $-q$. En el centro del mismo se coloca una carga puntual q.

(a) ¿Cuánto valen los momentos monopolar y dipolar? ¿Depende el momento dipolar del origen de coordenadas?

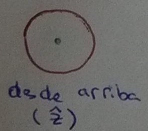
(b) Calcule el potencial y el campo eléctrico sobre el eje del anillo y estudie el comportamiento a distancias grandes.



$\lambda = \dfrac{-q}{2\pi R}$ Momento monopolar $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q_T}{r}$

Momento dipolar $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$ con $\bar{p} = \int_{V'} \bar{r}'\rho(\bar{r}')\,dV'$

$Q_T = q - q = 0 \longrightarrow$ Momento monopolar nulo.



$= \tilde{q}\ \ q'_i + q'_i\ \ \tilde{q} + \tilde{q}\ \ q'_i + \tilde{q}\ \ q'_i + \ldots$ con $-q = \sum_{i=1}^{N} -\tilde{q}_i$

$q = \sum_{i=1}^{N} q'_i$

Ej $\tilde{q} = -\dfrac{q}{10}$ $\longleftarrow$ divido al anillo en 10 secciones iguales

Entonces, es como si tuviera esto: $\underset{\bar{p}_1}{\longrightarrow} + \underset{\bar{p}_2}{\longleftarrow} + \underset{\bar{p}_3}{\swarrow} + \underset{\bar{p}_4}{\nearrow} + \ldots \longrightarrow \bar{p}_{TOTAL} = \bar{0}$

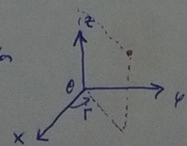
Otra forma: hagamos la cuenta

$\bar{p} = \int_{V'} \bar{r}'\rho(\bar{r}')\,dV \longrightarrow$ separo el anillo de la carga puntual en el origen de coordenadas

Anillo: $\bar{r}' = R\hat{r}$ $\longleftarrow$ uso coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

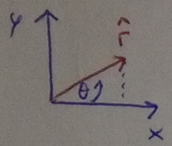
$\rho \Rightarrow \lambda$

$dV \Rightarrow d\ell = R\,d\theta$



$\bar{p}_{ANILLO} = \int_0^{2\pi} R\,\lambda\,R\,d\theta\,\hat{r} =$

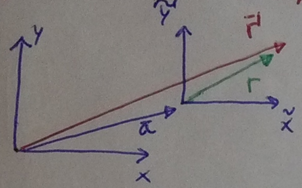
$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \text{sen}(\theta)\hat{y} \longrightarrow \bar{P}_{\text{ANILLO}} = R^2\lambda \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)\hat{x} + \text{sen}(\theta)\hat{y})\,d\theta = \bar{0}$$



$$\bar{P}_{\text{Carga}} = \int_{V'} \bar{0}\,\lambda\, dl = \bar{0} \qquad \bar{r}' = \bar{0}$$

$$\bar{P}_{\text{TOTAL}} = \bar{0}$$

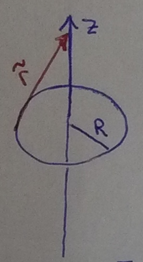
¿Depende el momento dipolar del origen de coordenadas?



$$\bar{r}' = \bar{a} + \bar{r} \longrightarrow \bar{P} = \sum_i q_i \bar{r}_i' = \sum_i q_i(\bar{a} + \bar{r}_i) = \sum_i q_i \bar{a} + \sum_i q_i \bar{r}_i$$

$$= \bar{a}\sum_i q_i + \sum_i q_i \bar{r}_i = \bar{a}\, Q_{\text{TOTAL}} + \bar{P}_N \text{. Entonces,}$$

si $Q_{\text{TOTAL}} = 0$ $\bar{P} = \bar{P}_N$ $\forall$ sistema de referencia. En otras palabras, el momento dipolar no depende del origen de coordenadas. $\rightarrow$ los dipolos siempre cumplen esto!



Anillo

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\tilde{r}|} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R\, d\theta}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda 2\pi R}{\sqrt{R^2+z^2}\,4\pi\epsilon_0}$$

"$-q$" ya que $\lambda = \frac{-q}{2\pi R}$

$$\tilde{r} = R\hat{r} + z\hat{z}$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = V_{(z)}$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\frac{2z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right) \rightarrow \boxed{E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

Carga q

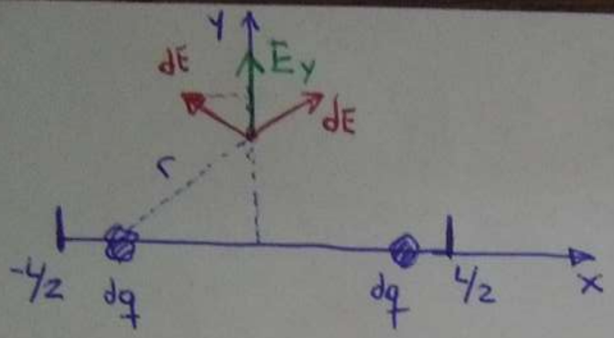
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|z|} \longrightarrow E_z = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{z^2}\right) \rightarrow E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Entonces, $V^{(\text{EJE})}_{\text{TOTAL}}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-q}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{q}{|z|}\right]$; $E_z^{(\text{TOTAL})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-qz}{(R^2+z^2)^{3/2}} + \frac{q}{z^2}\right]$

A grandes distancias $R \ll z \rightarrow \sqrt{R^2+z^2} \sim \sqrt{z^2} = |z| \longrightarrow V_{\text{TOTAL}} \sim 0$ y $E_z^{(\text{TOTAL})} \sim 0$

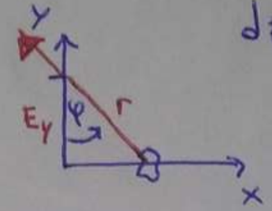
Ejercicio 14

Ejercicio 14
Calcule la integral definida en el problema anterior para el caso del hilo cargado uniformemente. Verifique que su gradiente es –E. ¿Qué ocurre cuando la longitud del hilo se hace infinita? **Nota:** Dado que estamos calculando el potencial sólo para puntos sobre un plano perpendicular al hilo y que pasa por el centro del mismo, el resultado no sirve para obtener la componente del campo eléctrico perpendicular a ese plano. Sin embargo, por simetría sabemos que esa componente debe ser nula.



$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sólo contribuye la componente E_y



$$dE_y = dE\cos\varphi \rightarrow E_y = \int dE_y = \int \frac{dq\cos\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

pero $dq = \lambda dx$; Además, como $r(\varphi)$ escribamos a r en función de φ → $\cos(\varphi) = \frac{y}{r}$

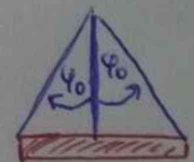
$$\rightarrow r = \frac{y}{\cos(\varphi)} \rightarrow E_y = \int dE_y = \int \frac{\lambda\, dx \cos(\varphi)}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{y}{\cos(\varphi)}\right)^2};$$

Por otro lado, $tg(\varphi) = \frac{x}{y} \rightarrow x = y\, tg(\varphi) \rightarrow dx = y \frac{d}{d\varphi}(tg(\varphi)) = \frac{y\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \xrightarrow{\text{reemplazando}}$

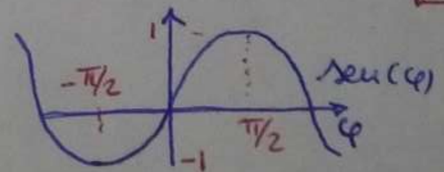
↓ y es fijo

$$E_y = \int dE_y = \int \frac{\lambda \cos(\varphi)}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{y}{\cos(\varphi)}\right)^2} \frac{y\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\varphi)\, d\varphi}{y}$$

con φ_0



$$\rightarrow \boxed{E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(sen(\varphi_0) - sen(-\varphi_0)\right)}$$



Hilo infinito $\varphi = \pi/2$ entonces $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}(1-(-1)) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \rightarrow \boxed{E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}}$