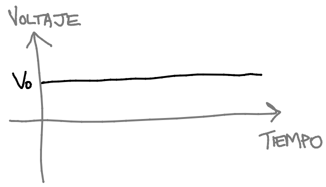
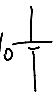
# Guía 6 (Circuitos de corriente alterna)

Corriente continua:

DC
Direct Current

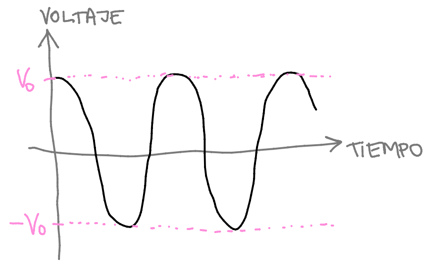



$V(t) = V_0$

Símbolo: 


Corriente alterna:

AC
Alternating
Current




Símbolo:  $V_0, \omega$

$V_0$: Voltaje máximo

$\omega$: Frecuencia angular

$\omega = 2\pi f$

$f$: Frecuencia normal $\left(Hz = \frac{1}{seg}\right)$

$V(t) = \cos(\omega t)$

En general nos vamos a quedar con esta opción

También podría ser:

$V(t) = \sin(\omega t)$

$V(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

$V(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

Tenemos oscilaciones → Usemos NÚMEROS COMPLEJOS!

Hagamos un paréntesis para recordar números complejos

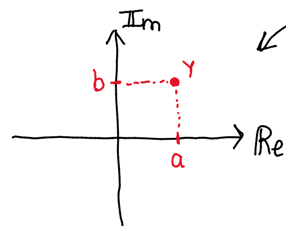
$j$ : Unidad imaginaria → Se le suele llamar i, pero para no confundirnos con la corriente lo llamamos j.

$j^2=-1$

$Y=a+bj$ $\begin{cases} a=\mathrm{Re}(Y) \rightarrow \text{Parte Real} \\ b=\mathrm{Im}(Y) \rightarrow \text{Parte Imaginaria} \end{cases}$

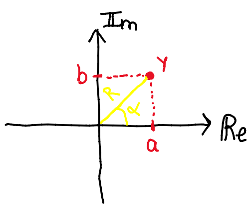
$a,b\in\mathbb{R}$

Representación cartesiana de un número complejo




Representación gráfica

$\in$ : Perteneciente
$\mathbb{R}$ : Reales
$\mathbb{C}$ : Complejos



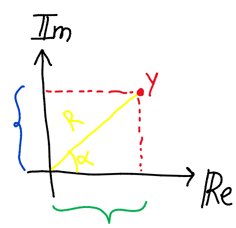

$Y=a+bj=Re^{j\alpha}$ → Representación polar de un número complejo

$R=|Y|=\sqrt{a^2+b^2}$ → Módulo

$\alpha=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ → Fase → Sale de que: $\text{tangente}=\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$

¿Por qué vale que $Y=Re^{j\alpha}$?

$e^{j\alpha}=\cos(\alpha)+j\cdot\sin(\alpha) \Rightarrow Re^{j\alpha}=\underbrace{R\cos(\alpha)}+j\underbrace{R\cdot\sin(\alpha)}$




Conjugado → $\bar{Y}=a-jb$

$\bar{Y}=Re^{-j\alpha}=R\cdot\underbrace{\cos(-\alpha)}_{\cos(\alpha)}+jR\cdot\underbrace{\sin(-\alpha)}_{-\sin(\alpha)}$

$Y\cdot\bar{Y}=(a+jb)\cdot(a-jb)=a^2-\cancel{jab}+\cancel{jab}+b^2=a^2+b^2=|Y|^2$

Apliquemos los números complejos a circuitos:

Tengo una fuente variable → $V^{real}=V_0\cos(\omega t)$

Defino: $V=V_0e^{j\omega t}$

Defino: $V = V_0 e^{j\omega t}$

$$V = V_0 \cos(\omega t) + j V_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\mathbb{R}e(V) = V_0 \cos(\omega t) = V^{real}$$

Hago lo mismo con la corriente:

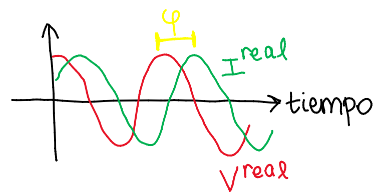
$$I^{real} = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) + j I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\mathbb{R}e(I) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = I^{real}$$

- Es razonable que la corriente tenga la misma frecuencia que la tensión porque la tensión es la que "empuja" a las cargas.
- Podría pasar que haya un desfase entre la tensión y la corriente $\rightarrow \varphi$

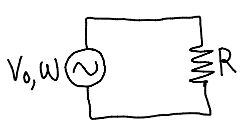



PERO, vamos a escribir a $I$ un poco distinto:

La idea es separar todo lo que tenga dependencia temporal de lo que no la tenga.

$$I = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{I_0 e^{j\varphi}}_{= i_0} \cdot e^{j\omega t} = i_0 e^{j\omega t} \qquad \begin{cases} I_0 \in \mathbb{R} \\ i_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Veamos por qué esto es útil usando un ejemplo sencillo:




$$V(t) = \underbrace{V_0}_{\in \mathbb{R}} e^{j\omega t}$$

$$I(t) = \underbrace{i_0}_{\in \mathbb{C}} e^{j\omega t} = \overbrace{\underbrace{I_0}_{\in \mathbb{R}} e^{j\varphi}}^{i_0} e^{j\omega t}$$

Ley de Ohm $\rightarrow V(t) = R I(t)$

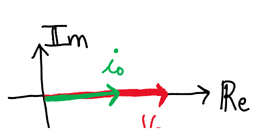
$$\Rightarrow V_0 \cancel{e^{j\omega t}} = R\, i_0 \cancel{e^{j\omega t}}$$

Como todo tiene la misma frecuencia, puedo tirar la parte temporal y así las cuentas quedan más sencillas.

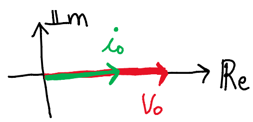
$$\Rightarrow i_0 = I_0 e^{j\varphi} = \frac{V_0}{R} \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} I_0 = \frac{V_0}{R} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Las resistencias NO me desfasan la corriente con respecto a la tensión.

Diagrama vectorial en este circuito:

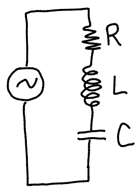



Estoy graficando la parte NO temporal de la corriente y de la tensión.




$\longrightarrow$ Estoy graficando la parte NO temporal de la corriente y de la tensión.

Veamos ahora el caso de un circuito RLC serie:




$$\underbrace{V = RI}_{\text{Ohm}} + L\dot{I} + \frac{Q}{C}$$

$\longrightarrow$ La caída de potencial en la bobina lo vimos con Guillem la clase pasada.

Derivo con respecto al tiempo:

$$\dot{V} = R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{I}{C}$$

$\dot{Q} = I$

$$\begin{cases} V = V_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{V} = j\omega V_0 e^{j\omega t} \\ I = i_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{I} = j\omega i_0 e^{j\omega t} \\ \qquad\qquad\qquad \ddot{I} = -\omega^2 i_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$j^2 = -1$

$$\Rightarrow j\omega V_0 \cancel{e^{j\omega t}} = R j\omega i_0 \cancel{e^{j\omega t}} - L\omega^2 i_0 \cancel{e^{j\omega t}} + \frac{i_0}{C} \cancel{e^{j\omega t}}$$

Acá es donde los números complejos hacen su magia!

Si nos hubiéramos quedado con funciones trigonométricas, como la derivada de sin es cos y la derivada de cos es -sin, NO hubiéramos podido cancelar la dependencia temporal.

Dividimos por $j\omega$:

$$V_0 = \underbrace{\left[R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right]}_{Z} i_0 \Rightarrow V_0 = Z\, i_0$$

$\longrightarrow$ Ley de Ohm en corriente alterna

$\frac{1}{j} = -j$

(porque $j^2 = -1$)

Se llama IMPEDANCIA y es una generalización de la resistencia para el caso de corriente alterna.

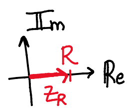
Es una medida de la oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica una tensión.

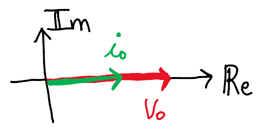
A diferencia de la resistencia, es un número *complejo*.

En general, para cualquier circuito, la impedancia estará dada por: $Z = \frac{\text{Voltaje}}{\text{Corriente}}$

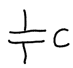
RESISTENCIA: 


$$\boxed{Z_R = R \in \mathbb{R}} \quad \Rightarrow i_0 = \frac{V_0}{Z_R} = \frac{V_0}{R} \in \mathbb{R}$$

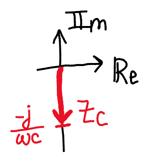



La corriente y la tensión están en fase.

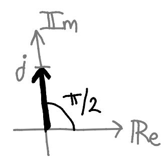
CAPACITOR: 

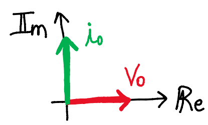

$$\boxed{Z_C = \frac{-j}{\omega C} \in \mathbb{C}} \quad \Rightarrow i_0 = \frac{V_0}{Z_C} = \frac{V_0}{-j/\omega C} = j\omega C V_0 \in \mathbb{C}$$



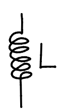

$$i_0 = \underbrace{\omega C V_0}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e^{j\pi/2}}_{\text{Fase}}$$

$$e^{j\pi/2} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + j \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = j$$



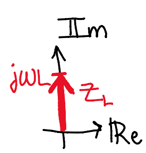

La corriente está adelantada en pi/2 respecto de la tensión.

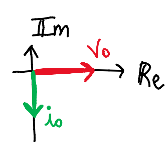
INDUCTANCIA: 


Bobina

$$\boxed{Z_L = j\omega L \in \mathbb{C}} \quad \Rightarrow i_0 = \frac{V_0}{Z_L} = \frac{V_0}{j\omega L} = \frac{-V_0 j}{\omega L} \in \mathbb{C}$$

$$i_0 = \frac{V_0}{\omega L} \underbrace{e^{-j\pi/2}}_{-j}$$

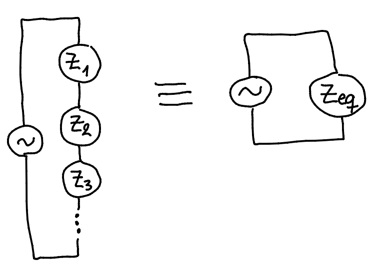



La corriente está atrasada en pi/2 respecto de la tensión.

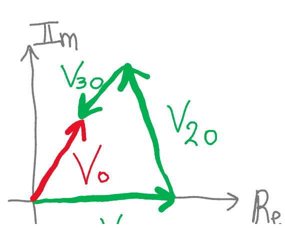
$Z \longrightarrow$ Impedancia genérica.
Podría ser un R, L, C, o una combinación de ellos.

En serie:



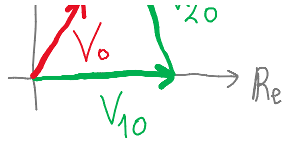

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots$$

$$V_0 = V_{10} + V_{20} + V_{30} + \cdots$$



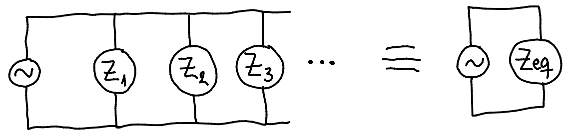

Los voltajes se suman *vectorialmente*

$$V_0 = V_{10} + V_{20} + V_{30} + \cdots$$



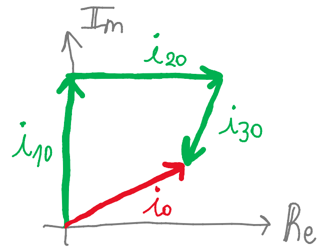

*vectorialmente*

En paralelo:




$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \cdots}$$

$$i_0 = i_{10} + i_{20} + i_{30} + \cdots$$

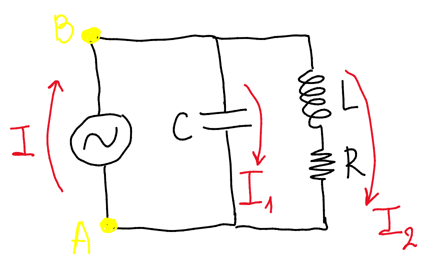



Las corrientes se suman *vectorialmente*

**Ejercicio 1**

Un condensador $C = 1\,\mu\text{F}$ está conectado en paralelo con una inductancia $L = 0.1\,\text{H}$ cuya resistencia interna vale $R = 1\,\Omega$. Al conectar la combinación a una fuente alterna de 220 V y 50 Hz, determine:

(a) la corriente por el condensador.
(b) la corriente por la inductancia.
(c) la corriente total por la fuente.
(d) la potencia total disipada.
(e) Construir el diagrama vectorial en el plano complejo para cada paso.




$V_0 = 220\,V$
$f = 50\,Hz$
$\omega = 2\pi f$

a) $I_1$?
b) $I_2$?
c) $I$?

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{Z_C} \rightarrow \underbrace{I_{10}}_{\in \mathbb{C}} \cancel{e^{j\omega t}} = \frac{V_0 \cancel{e^{j\omega t}}}{Z_C}$$

Voy a usar el subíndice 0 para indicar la parte NO temporal.

$$I_{10} = \frac{V_0}{\frac{-j}{\omega C}} = j\omega C V_0 = \omega C V_0 e^{j\pi/2}$$

$$I_1^{real} = \mathbb{R}e\{I_1\} = \mathbb{R}e\{I_{10}\, e^{j\omega t}\}$$

$$I_1^{real} = \mathbb{R}e\left\{\omega C V_0 e^{j(\omega t + \pi/2)}\right\} = \mathbb{R}e\left\{\omega C V_0 \left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{I_1^{real} = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_L+Z_R} \Rightarrow I_{20} = \frac{V_0}{Z_L+Z_R} = \frac{V_0}{j\omega L+R} = \underbrace{\frac{R-j\omega L}{R-j\omega L}}_{=1}\frac{V_0}{R+j\omega L}$$

L y R están en serie

Recordemos $y \cdot \bar{y} = |y|^2$

$$I_{20} = \frac{V_0(R-j\omega L)}{R^2+\omega^2L^2}$$

$$I_2^{real} = \mathrm{Re}\left\{I_{20}\, e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_0(R-j\omega L)}{R^2+\omega^2L^2}\left[\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right]\right\}$$

$$I_2^{real} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_0}{R^2+\omega^2L^2}\left[R\cos(\omega t)+Rj\sin(\omega t)-j\omega L\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t)\right]\right\}$$

$$\boxed{I_2^{real} = \frac{V_0}{R^2+\omega^2L^2}\left[R\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t)\right]}$$

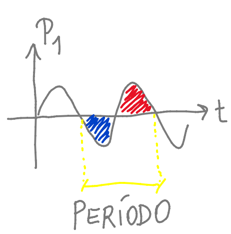
$$\boxed{I^{real} = I_1^{real} + I_2^{real}}$$

(d) la potencia total disipada.

Potencia = Voltaje × Corriente

$$P_1 = \mathrm{Re}(V_{AB})\cdot \mathrm{Re}(I_1) = \omega C V_0^2 \cos(\omega t)\cdot\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Potencia disipada por C




se cancela con

$\Rightarrow$ P1 en cada instante NO es cero. Pero en cada ciclo, la misma potencia que el capacitor me da, después me la saca. O sea que P1 total en un ciclo es cero.

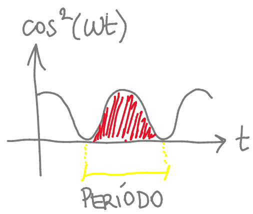
$$P_2 = \mathrm{Re}(V_{AB})\cdot \mathrm{Re}(I_2) = \frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\cos(\omega t)\left[R\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t)\right]$$

Potencia disipada por R y L

$\boxed{P_{TOT} = P_1 + P_2}$ → Potencia total disipada en el instante t

COMENTARIO:

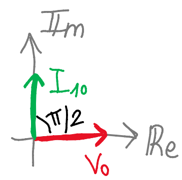
- Si tuviera solo un L, a la potencia disipada por la inductancia le pasaría lo mismo que le pasó a la potencia disipada por C.
- Si tuviera solo un R, la potencia disipada sería proporcional a coseno al cuadrado.




→ La potencia disipada por R es siempre positiva, entonces, la potencia total disipada en un ciclo es positiva, NO es nula!

(e) Construir el diagrama vectorial en el plano complejo para cada paso.

$$I_{10} = \omega C V_0 e^{j\pi/2}$$




$$I_{20} = \frac{V_0(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

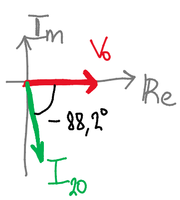
¿Cuál es la fase $\alpha$ de $I_{20}$?

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(I_{20})}{\mathrm{Re}(I_{20})}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-V_0\omega L}{\cancel{R^2+\omega^2 L^2}}}{\frac{V_0 R}{\cancel{R^2+\omega^2 L^2}}}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$$

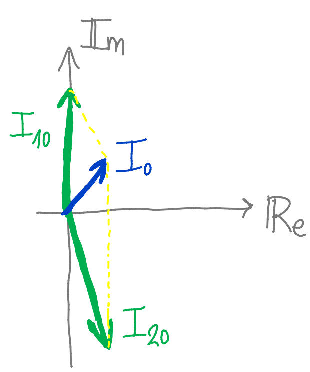
$$\left.\begin{aligned} H &= \Omega \cdot seg \\ H_z &= \frac{1}{seg} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H \cdot H_z = \Omega$$

→ Está bien porque el argumento del arcotangente tiene que ser adimensional.

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{\overbrace{2\pi \cdot 50 H_z}^{\omega} \cdot 0{,}1 H}{1\Omega}\right) = -88{,}2^\circ$$




$$I_0 = I_{10} + I_{20}$$




Para calcular la fase de $I_0$ hay que hacer la suma y tomar arcotangente de la parte imaginaria sobre la real. Se los dejo a ustedes.

**Ejercicio 2**

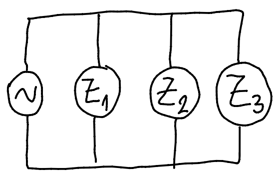
Tres impedancias $Z_1$, $Z_2$, y $Z_3$ están conectadas en paralelo a una fuente de 40 V y 50 Hz. Suponiendo que $Z_1 = 10\,\Omega$, $Z_2 = 20(1+j)\,\Omega$ y $Z_3 = (3-4j)\,\Omega$:

(a) calcular la admitancia, conductancia y susceptancia en cada rama.

(b) calcular la conductancia y la susceptancia resultante de la combinación.

(c) calcular la corriente en cada rama, la corriente resultante y la potencia total disipada.

(d) trazar el diagrama vectorial del circuito.




Voy a hacer las cuentas sin pensar en si las impedancias son L, R, C, o una combinación de ellas.

(a) calcular la admitancia, conductancia y susceptancia en cada rama.

$Z$: Impedancia

$Y = \frac{1}{Z}$ : Admitancia

$\mathrm{Im}(Y)$: Susceptancia

$\mathrm{Re}(Y)$: Conductancia

$$Z_3 = (3-4j)\,\Omega$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{(3-4j)\,\Omega}$$

$$Y_3 = \frac{(3+4j)}{(3+4j)(3-4j)\,\Omega} = \frac{3+4j}{(3^2+4^2)\,\Omega}$$

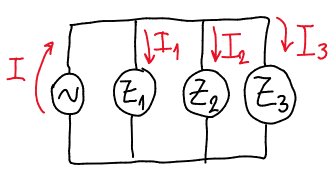
$$\mathrm{Im}(Y_3) = \frac{4}{25\,\Omega}$$

$$\mathrm{Re}(Y_3) = \frac{3}{25\,\Omega}$$

(b) calcular la conductancia y la susceptancia resultante de la combinación.

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

(c) calcular la corriente en cada rama, la corriente resultante y la potencia total disipada.




$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{30} = \frac{V_0}{Z_3} = \frac{40V}{(3-4j)\,\Omega} = \frac{(3+4j)\cancel{\Omega}}{(3+4j)\cancel{\Omega}}\,\frac{40V}{(3-4j)\,\Omega} = \frac{(3+4j)\cdot 40V}{(3^2+4^2)\,\Omega} = \frac{(120+160j)V}{25\,\Omega} = \left(\frac{24}{5} + \frac{32}{5}j\right)A$$

$$I_3^{real} = \mathrm{Re}\{I_{30}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{24}{5}+\frac{32}{5}j\right)A\cdot\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\right\}$$

$$\boxed{I_3^{real} = \left(\frac{24}{5}\cos(\omega t) - \frac{32}{5}\sin(\omega t)\right)A}$$

$I_1^{real}$ y $I_2^{real}$ se calculan igual.

Para que chequeen cuando lo hagan:

$$\boxed{I_1^{real} = 4\cos(\omega t)A}$$

$$\boxed{I_2^{real} = [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)]A}$$

$$\boxed{I^{real} = I_1^{real} + I_2^{real} + I_3^{real}}$$

$\omega = 2\pi\cdot 50Hz$

¿Potencia?

$$P_1 = V^{real} \cdot I_1^{real} = \underbrace{V_0}_{40V} \cos(\omega t) \cdot 4\cos(\omega t)\,A$$

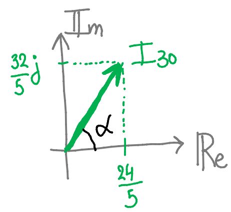
$$P_1 = 160 \cos^2(\omega t)\ W \qquad V \cdot A = W : \text{Watt}$$

$P_2$ y $P_3$ se calculan igual

$$\boxed{P = P_1 + P_2 + P_3}$$

(d) trazar el diagrama vectorial del circuito.

$$I_{30} = \left(\frac{24}{5} + \frac{32}{5} j\right) A$$

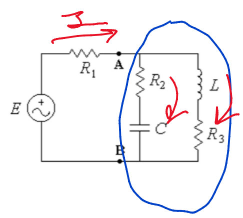



$$\alpha = \arctan\left(\frac{32/\cancel{5}}{24/\cancel{5}}\right)$$

Los diagramas para $I_{10}$, $I_{20}$ y $I_0$ se hacen igual.

**Ejercicio 4**
En el circuito indicado, la fuente de tensión $E$ entrega 100 V con una frecuencia de 50 Hz y los elementos que lo constityen son: $C = 20\,\mu F$, $L = 0.25$ H, y $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$.

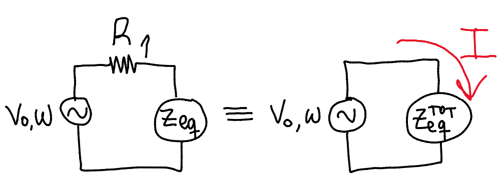
(a) Calcular la impedancia equivalente a la derecha de los puntos A y B.
(b) Calcular la corriente que circula por cada resistencia.
(c) Construir el diagrama vectorial del circuito.




(a) Calcular la impedancia equivalente a la derecha de los puntos A y B.

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{R_3 + j\omega L}}}$$

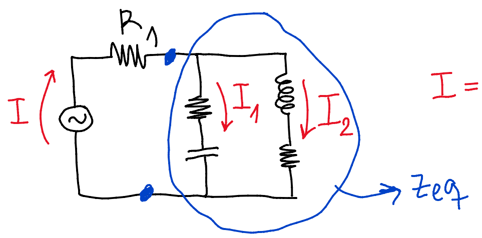
(b) Calcular la corriente que circula por cada resistencia.




$$Z_{eq}^{TOT} = R_1 + Z_{eq}$$

$$I = I_0 e^{j\omega t} \longrightarrow I_0 = \frac{V_0}{Z_{eq}^{TOT}}$$

$\boxed{Re(I)}$ → Corriente que circula por R1.




$I = I_1 + I_2$

$V_{R10} = I_0 \cdot Z_{R1} = \frac{V_0}{Z_{eq}^{TOT}} R_1 \longrightarrow$ Tensión que cae en R1 (no es la tensión real)

$V_{R10} + \underbrace{V_{Zeq\,0}} = V_0 \Longrightarrow V_{Zeq\,0} = V_0 - V_{R10}$

Tensión que cae en Zeq (no es la tensión real)

$I_{10} = \frac{V_{Zeq\,0}}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} \rightarrow Re(I_1) = \boxed{Re(I_{10} e^{j\omega t})} \longrightarrow$ Corriente que circula por R2.

**Ejercicio 5**

Una resistencia $R$, un condensador $C$ y una inductancia $L$ están conectados en serie.

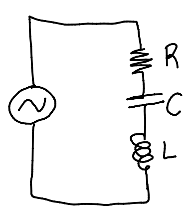
(a) Calcular la impedancia compleja de la combinación y su valor en resonancia (esto es, cuando la reactancia $X$ se anula).

(b) Construir el diagrama vectorial. Empleándolo, hallar el valor de la impedancia cuando $X = R$ y para la resonancia. Notar que existen dos valores de frecuencia ($\omega_2$ y $\omega_1$) para los cuales se tiene $X = R$.

(c) Trazar la curva de resonancia y hallar el ancho de banda ($\omega_2 - \omega_1$).

(d) Repetir los puntos anteriores suponiendo ahora que los mismos componentes se conectan en paralelo.

(a) Calcular la impedancia compleja de la combinación y su valor en resonancia (esto es, cuando la reactancia $X$ se anula).




$$\boxed{Z_{eq} = R - \frac{j}{\omega C} + j\omega L}$$

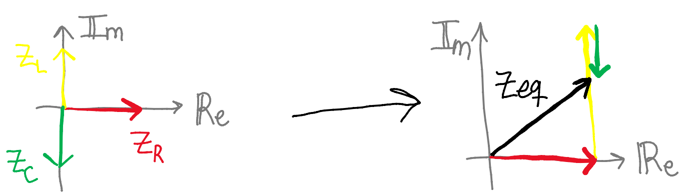
Reactancia $\longrightarrow X = Im(Z)$

Resonancia $\longrightarrow X = Im(Z_{eq}) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$

$\Rightarrow \boxed{Z_{eq}^{res.} = R}$

$\omega = \cancel{\pm} \frac{1}{\sqrt{LC}}$

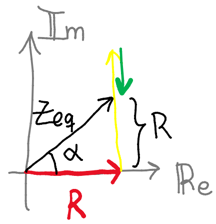
(b) Construir el diagrama vectorial. Empleándolo, hallar el valor de la impedancia cuando $X = R$ y para la resonancia. Notar que existen dos valores de frecuencia ($\omega_2$ y $\omega_1$) para los cuales se tiene $X = R$.




Zeq lo puedo pensar como la suma vectorial de $Z_{R\,L\,C}$

Zeq lo puedo pensar como la suma vectorial de $Z_{R,L,C}$

Si X = R: $\Rightarrow Z_L + Z_C = Rj$




$$|Z_{eq}| = \sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2}\,R$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R}{R}\right) = \frac{\pi}{4}$$

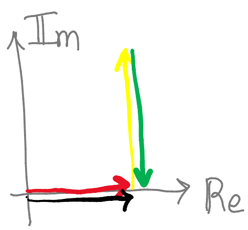
$$\Rightarrow Z_{eq} = \sqrt{2}\,R\,e^{j\pi/4}$$

$$X = R \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = R \Rightarrow \omega^2 L - \omega R - \frac{1}{C} = 0$$

Nos quedó una cuadrática para w. Entonces van a haber dos valores de w para los cuales X = R. Les dejo a ustedes resolver la cuadrática.

Si X = 0: $\Rightarrow$ Resonancia

$Z_L + Z_C = 0$




$Z_{eq} = R$

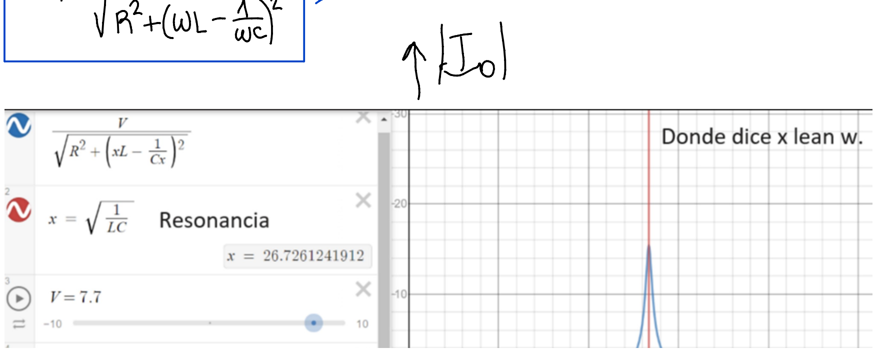
(c) Trazar la curva de resonancia y hallar el ancho de banda $(\omega_2 - \omega_1)$.

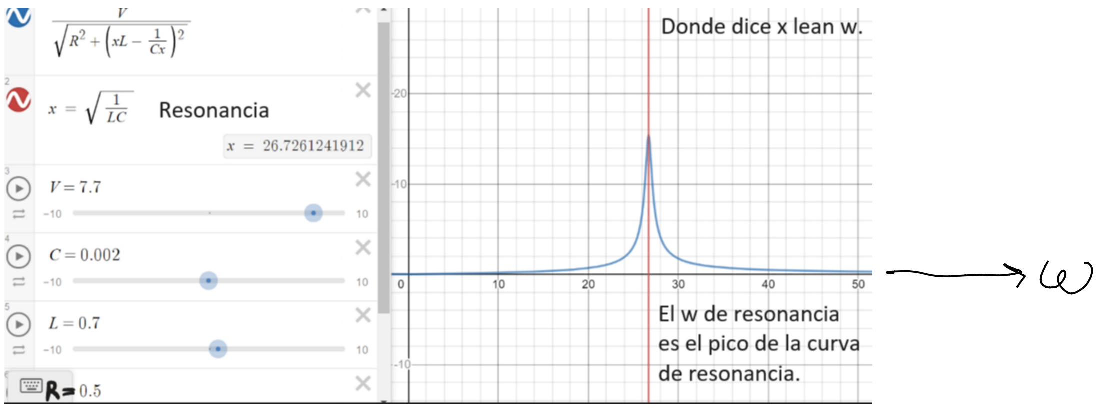
- Curva de resonancia: Intensidad de corriente en función de la frecuencia.

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_{eq}} = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_0\left(R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$|I_0|^2 = \frac{V_0^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2} \longleftarrow |a+bj|^2 = (a+bj)(a-bj)$$

$$\boxed{|I_0| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}} \rightarrow \text{Curva de resonancia}$$






- Fíjense que la curva de resonancia va a ser máxima cuando el denominador sea mínimo.
- El denominador es la suma de dos términos positivos (también está la raíz pero no importa).
- Solo uno de los dos términos depende de w. Entonces, el mínimo del denominador será cuando el término que contiene w se anule.
- El término con w se anula cuando la impedancia es Z = R. Y esto es la definición de resonancia.

$$|I_0| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$