Guía 7

Friday, 26 February 2021 11:34

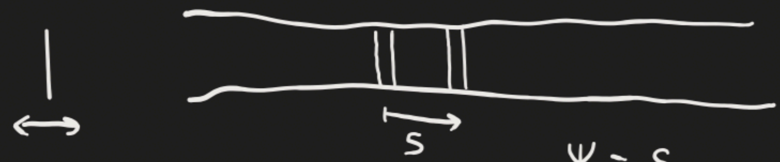
Ondas viajeras

velocidad de la onda

$$\Psi(x,t) = f(x - ct) \longrightarrow$$

$$\Psi(x,t) = f(x + ct) \longleftarrow$$

$\Psi = y$



$\Psi = s$

Ondas (en general)

$$\Psi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = f''(x - ct) + g''(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x + ct)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$ Ecuación de ondas

Ec. Newton ($F = ma$) para un pedacito de cuerda

tensión de la cuerda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

densidad lineal de la cuerda

$$\mu = \frac{M}{L}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

De forma similar, se obtiene velocidad del sonido

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}}$$

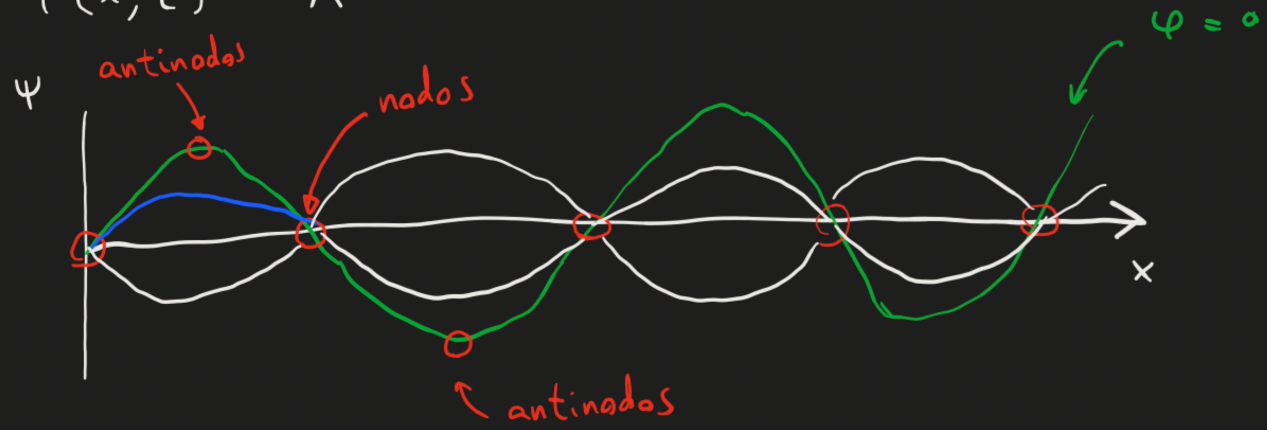
presión

densidad

constante que depende del gas

Ondas estacionarias

$$\Psi(x,t) = A \sin(kx + \varphi)\sin(\omega t + \phi)$$



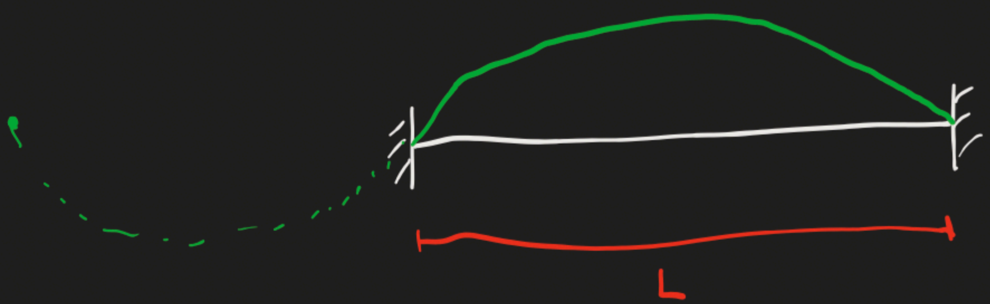
$$\boxed{\text{Cualquier onda es superposición de ondas estacionarias}}$$ (posiblemente ∞ términos)

Ejemplo $\sin(kx - \omega t) = \sin(kx)\cos(\omega t) - \cos(kx)\sin \omega t$

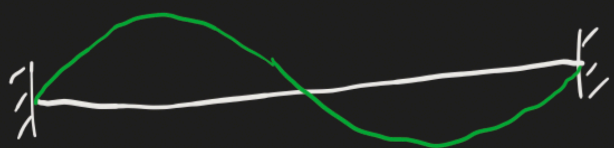
Onda armónica común

Ondas estacionarias

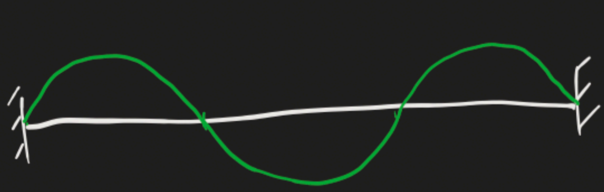
Cuerda con extremos fijos $\longrightarrow$ Extremos son nodos



$$L = \frac{\lambda}{2}$$



$$L = \lambda$$



$$L = 3\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \quad L = n\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{2L}{n} \equiv \lambda_n \qquad n = 1, 2, 3, \dots \\[2em] \nu = \dfrac{c}{\lambda} = n\dfrac{c}{2L} \equiv \nu_n \end{array}}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

ν_n frecuencias naturales

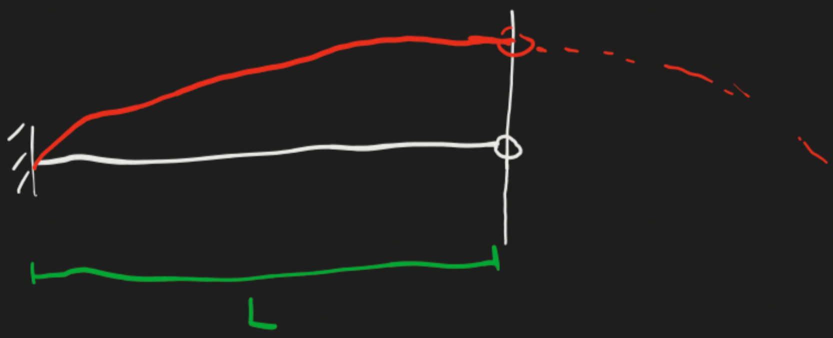
armónicos

modos de vibración

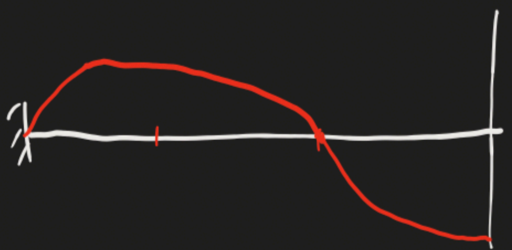
$$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\frac{c}{2L} = \nu_1 \quad \text{frecuencia fundamental}$$

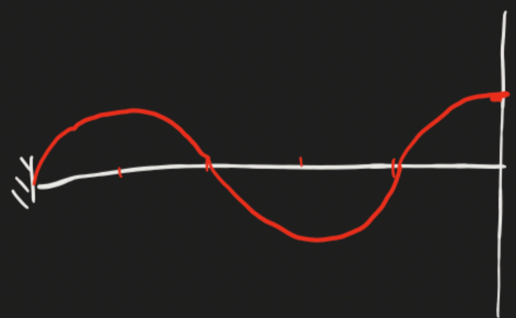
Cuerda con un extremo libre → Extremo fijo nodo, extremo libre antinodo



$$L = \frac{\lambda}{4}$$



$$L = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 3\frac{\lambda}{4}$$



$$L = \lambda + \frac{\lambda}{4} = 5\frac{\lambda}{4}$$

$$L = n\frac{\lambda}{4}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \lambda &= \frac{4L}{n} \\ \nu &= \frac{c}{\lambda} = n\frac{c}{4L} \end{aligned}}$$

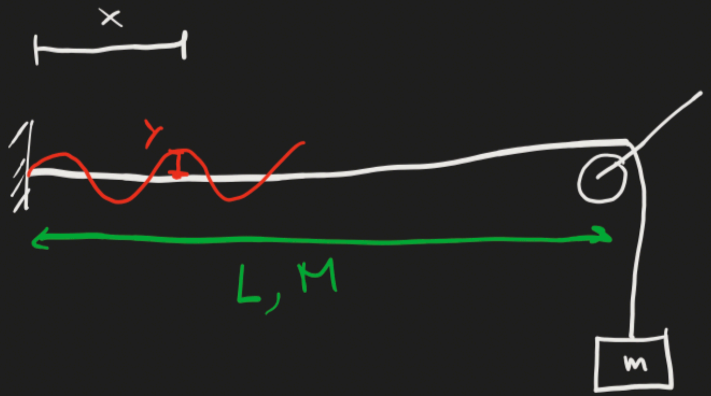
Ejercicio 7

El extremo de un tubo delgado de goma (o sea, una cuerda elástica) está fijo a un soporte. El otro extremo pasa por una polea situada a 5 m del extremo fijo y se cuelga de dicho extremo una carga de 2 kg. La masa del tubo entre el extremo fijo y la polea es 0.6 kg. Una onda armónica transversal de 1 mm de amplitud y longitud de onda 30 cm se propaga a lo largo del tubo.

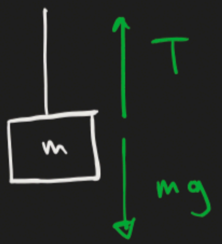
(a) Calcule la velocidad de propagación de dicha onda.

(b) Escriba la ecuación que describe la onda.

(c) Calcule la velocidad transversal máxima.



(a) $$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{TL}{M}} = \boxed{\sqrt{\frac{mgL}{M}} = c}$$



Reposo $\longrightarrow$ $T = mg$

(b) Onda armónica $$y = A \sin(kx - \omega t)$$

$$= A \sin[k(x - ct)]$$

$$= A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$$

dato dato (a)

(c) Velocidad transversal:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{max} = A\omega$$

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Ejercicio 8

Sea una cuerda de densidad lineal de masa $0.2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ y longitud 80cm sometida a una tensión de 80N.

(a) Calcule la velocidad con que se propagan ondas en esta cuerda. $c = \sqrt{T/\mu}$

(b) Se fija uno de sus extremos a un soporte ideal, y se le permite al otro moverse libremente. Se deforma la cuerda de modo de generar ondas estacionarias. Encuentre la frecuencia y longitud de onda fundamental y las armónicas. Dibuje los primeros tres modos de oscilación de la cuerda.

(c) Ambos extremos se sujetan a soportes ideales y se deforma la cuerda de modo de generar ondas estacionarias. Encuentre la frecuencia y longitud de onda fundamental y las armónicas. Dibuje los primeros tres modos de oscilación de la cuerda.

(d) En las mismas condiciones del punto anterior la cuerda está inicialmente deformada adoptando la forma de su tercer modo normal y con una amplitud de 4,5 mm. Calcule la frecuencia de la oscilación y el valor máximo de la velocidad transversal de la cuerda.

(d) $$y(x,t) \underset{\uparrow}{=} A \sin(k_3 x) \sin(\omega_3 t)$$

3^r modo

$$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3}$$

$$\omega_3 = 2\pi \nu_3$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = n \frac{c}{2L}$$

Frecuencia $\nu_3 = 3 \frac{c}{2L}$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega_3 \sin(k_3 x) \cos(\omega_3 t)$$

Ejercicio 9

La ecuación de una onda de presión en una columna de gas es:

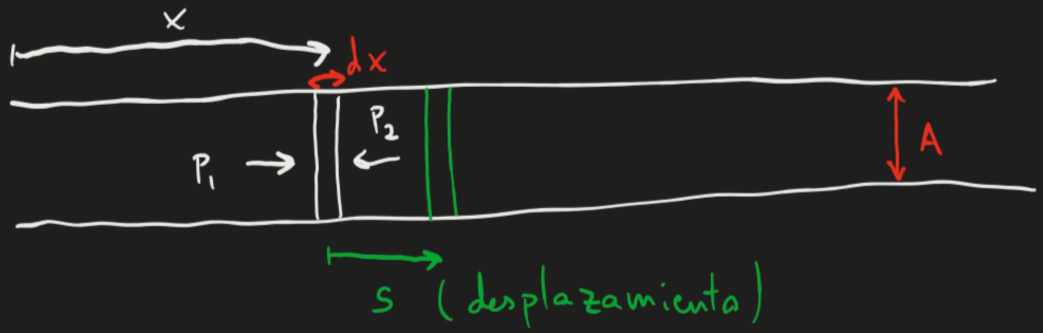
$$\delta P = A_p \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right)$$

donde δP es la presión medida respecto a la presión del equilibrio.

(a) Halle la expresión para las ondas de desplazamiento.

(b) Muestre que las ondas de desplazamiento están desfasadas en $\pi/2$ respecto de las ondas de presión.

$$\delta P = A_p \sin(kx - \omega t)$$



Ec. Newton $\left(F = m a \right)$ $\quad a = \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

$m = \rho A \, dx$

densidad del gas

$$F = P_1 A - P_2 A$$
$$= A(P_1 - P_2)$$
$$= -A(P_2 - P_1)$$
$$= -A \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\rho \cancel{A} \, \cancel{dx} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = - \cancel{A} \frac{\partial p}{\partial x} \cancel{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}$$

$$\delta p = A_p \sin(kx - \omega t)$$

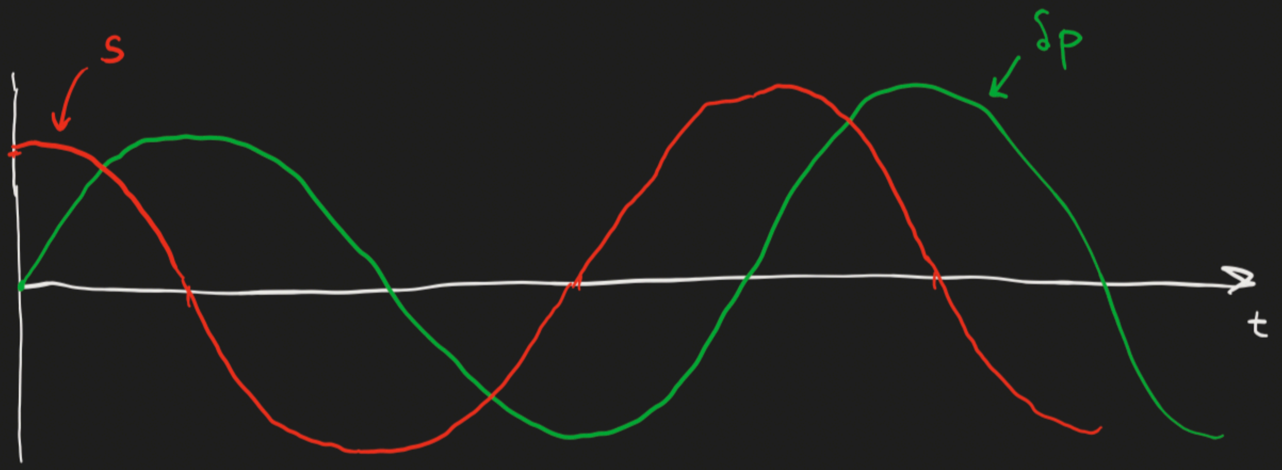
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \delta p}{\partial x} = A_p k \cos(kx - \omega t)$$

$$p = P_{atm} + \delta p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} A_p k \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = + \frac{A_p k}{\rho \omega} \sin(kx - \omega t) + \cancelto{0}{f(x)}$$

$$\boxed{s = \frac{A_p k}{\rho \omega^2} \cos(kx - \omega t) = s(x,t)}$$



$$\cos\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \pi/2) \longrightarrow \boxed{s = \frac{A_p k}{\rho\,\omega^2}\sin(kx - \omega t + \pi/2)}$$

Ejercicio 13

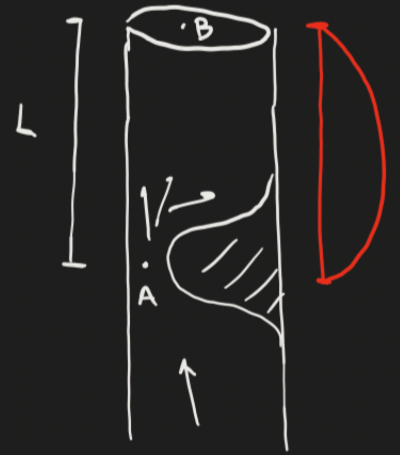
(a) ¿Cuánto vale la menor longitud que puede tener un tubo de órgano abierto en ambos extremos para que produzca en el aire un sonido de 440 Hz?

(b) ¿Qué longitud deberá tener un tubo de órgano cerrado para que produzca el mismo tono que en el ítem (a), en su primer armónico?

(c) Si la cuerda de un violín tiene 50cm de longitud y una masa de 2g, ¿qué tensión debe aplicársele para que produzca la misma nota que en el ítem (a) como su modo fundamental?

(d) Para la cuerda del punto (c) calcule la longitud de onda de la oscilación, y la longitud de onda del sonido producido.

(a)



Tubo abierto $\longrightarrow$ $P_A = P_B = P_{atm}$

$\longrightarrow$ A y B son nodos de la onda de presión

$\longrightarrow$ Misma situación que cuerda con extremos fijos

$$\longrightarrow \quad L = n\frac{\lambda}{2} \underset{\lambda\nu = c}{=} n\frac{c}{2\nu}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{L_{min} = \frac{c}{2\nu}} \underset{\nu = 440\,\mathrm{Hz}}{=} \frac{330\ m/\cancel{s}}{880\ \cancel{s}} = \frac{33}{88}\ m$$

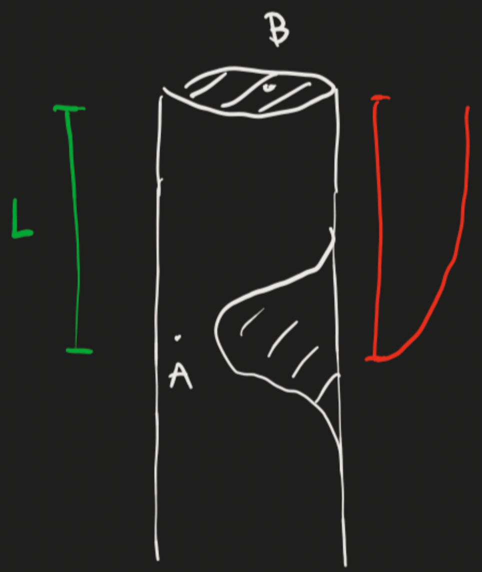
$\nu = 440\,\mathrm{Hz}$

$\mathrm{Hz} = s^{-1}$

c = vel. sonido en aire

$= 330\ m/s$

(b)



A nodo de la onda de presión

B nodo de la onda de desplazamiento

$\hookrightarrow$ Antinodo de la onda de presión

$\Rightarrow$ Misma situación que cuerda con 1 extremo fijo y otro libre

$$\Rightarrow \quad L = n\frac{\lambda}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

1er armónico: $n = 1 \Rightarrow L = \dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{c}{4\nu}$

(c) $L = n \frac{\lambda}{2}$; 1^{er} armónico $\Rightarrow n = 1$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\lambda}{2}} = \frac{c}{2\nu} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{2\nu} = \frac{\sqrt{TL/M}}{2\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{TL}{M} = (2\nu L)^2 \Rightarrow \boxed{T = ML(2\nu)^2}$$

(d) $\boxed{\lambda = 2L}$

$$\boxed{\lambda_{sonido} = \frac{\overset{330\ m/s}{c_{sonido}}}{\nu} = 2L_{tubo} \text{ (ítem (a))}}$$

Ejercicio 14

El nivel de agua en una probeta de 1m de longitud puede ser ajustado a voluntad. Se coloca un diapasón sobre el extremo abierto del tubo. El mismo oscila en una frecuencia de 600 Hz. ¿Para qué niveles de agua habrá resonancia?

Resonancia: frecuencia diapasón = alguna de las frecuencias naturales del tubo