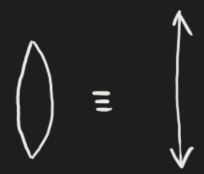
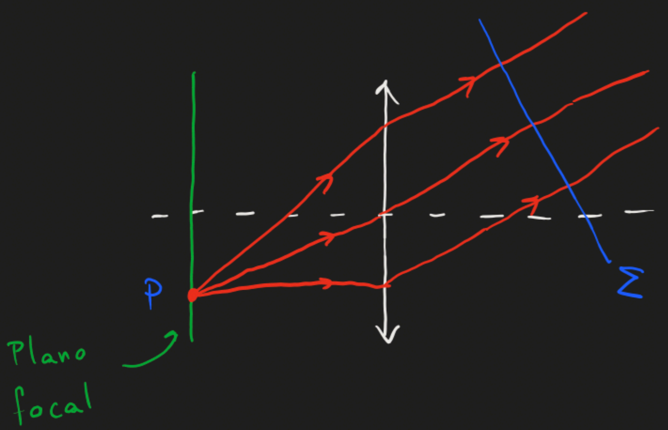
Guía 9

Thursday, 4 March 2021 19:51

Lentes (convergentes)

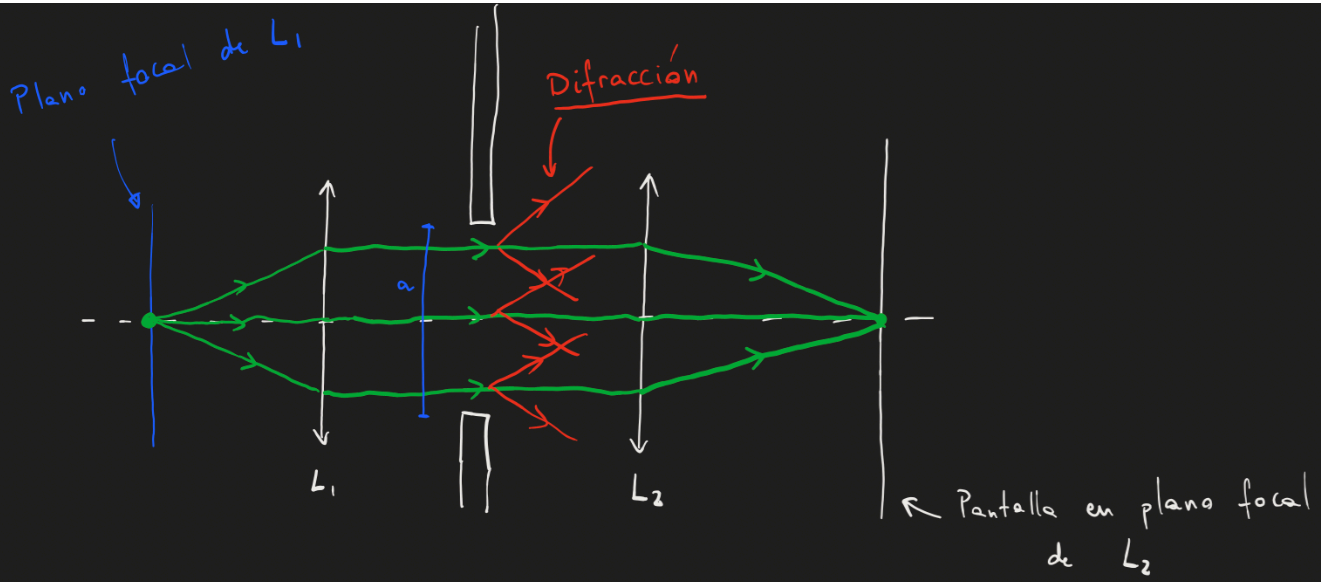


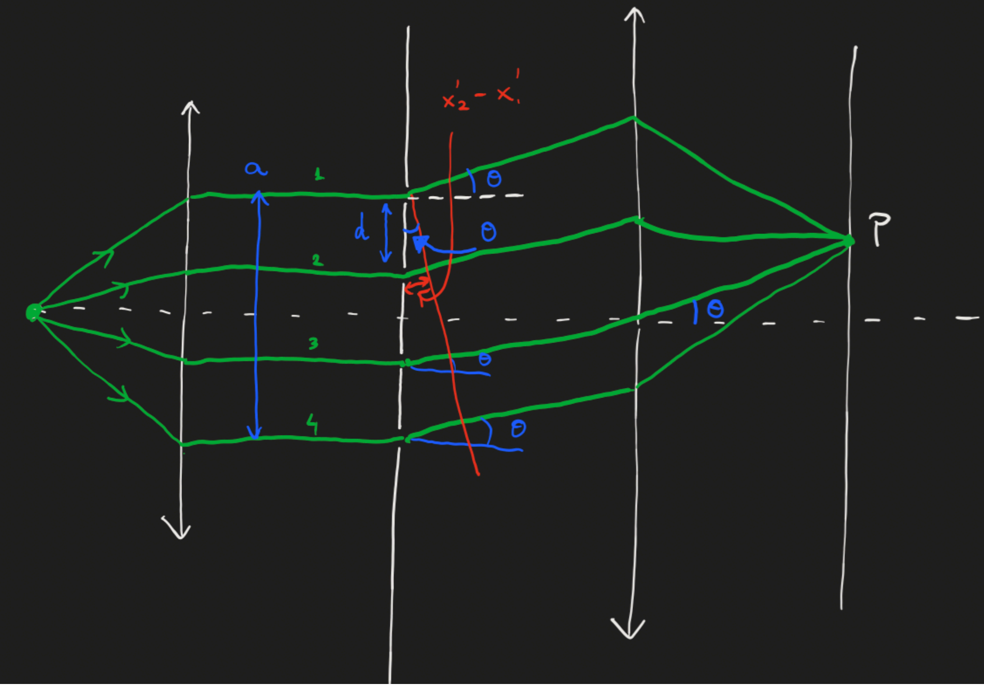


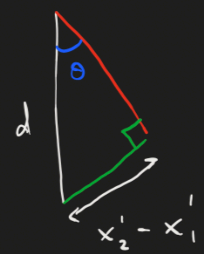
* Los rayos que pasan por el centro no se desvían

* Los rayos provenientes (incidentes) de un punto del plano focal salen paralelos (vienen)

* Camino óptico entre P y Σ es el mismo para todos los rayos







$$x_2' - x_1' = d \sin\theta$$

$$x_3' - x_1' = 2d \sin\theta$$

$$\vdots$$

$$\boxed{x_n' - x_1' = (n-1)\, d \sin\theta}$$

$$E(x,t) = \epsilon_0 \cos(kx' - \omega t) = Re\left[\underbrace{\epsilon_0 e^{i(kx'-\omega t)}}_{\tilde{E}(x,t)}\right]$$

x': camino óptico

$$\tilde{E}(P,t) = \tilde{E}_1(P,t) + \tilde{E}_2(P,t) + \dots + \tilde{E}_N(P,t)$$

$$= \epsilon_0 e^{i(kx_1'-\omega t)} + \epsilon_0 e^{i(kx_2'-\omega t)} + \dots + \epsilon_0 e^{i(kx_N'-\omega t)}$$

$$= \epsilon_0 e^{i(kx_1'-\omega t)}\left[1 + e^{ik(x_2'-x_1')} + \dots + e^{ik(x_N'-x_1')}\right]$$

$$a+b+c+\dots = a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \dots\right)$$

Diferencia de camino óptico entre los rayos 1 y n

$$= \epsilon_0 \, e^{i(kx_1' - \omega t)} \sum_{n=1}^{N} e^{ik(x_n' - x_1')}$$

$x_n' - x_1' = (n-1)\, d \sin\theta$

$$= \epsilon_0 \, e^{i(kx_1' - \omega t)} \sum_{n=1}^{N} e^{i\underbrace{k(n-1)\, d \sin\theta}_{=2\delta}}$$

$$= \epsilon_0 \, e^{i(kx_1' - \omega t)} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left(e^{i2\delta}\right)^{n-1}}_{\parallel}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} x^{n-1} = \frac{x^N - 1}{x - 1}}$$

$$\frac{e^{i2N\delta} - 1}{e^{i2\delta} - 1}$$

$$\parallel$$

$$\frac{e^{iN\delta}\left(e^{iN\delta} - e^{-iN\delta}\right)}{e^{i\delta}\left(e^{i\delta} - e^{-i\delta}\right)} = e^{i(N-1)\delta} \, \frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}$$

$e^{i\theta} \quad e^{-i\theta}$

$$e^{i\cdot} \left(e^{i\cdot} - e \right)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\uparrow \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \tilde{E}(P,t) = \epsilon_0\, e^{i(kx_1' - \omega t)}\, e^{i(N-1)\delta} \frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}$$

$$= \left[\epsilon_0 \frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\, e^{i[kx_1' - \omega t + (N-1)\delta]} = \tilde{E}(P,t) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E(P,t) = \epsilon_0 \frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta} \cos\left[kx_1' - \omega t + (N-1)\delta\right]}$$

$$\boxed{\delta = \frac{kd}{2}\sin\theta}$$

$$\parallel$$

$A(P)$, $A(\theta)$

Amplitud en el punto P

1 sola ranura de ancho a :

$N \longrightarrow \infty$

$d \longrightarrow 0$ con $a = Nd$ fijo

$\epsilon_0 \longrightarrow 0$ con $E_0 = N\epsilon_0$ fijo

$$A(\theta) = \epsilon_0 \frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta} = \frac{\overset{E_0}{\overset{\shortparallel}{N\epsilon_0}}}{\underset{\uparrow}{N\delta}} \sin\alpha = \boxed{E_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} = A(\theta)}$$

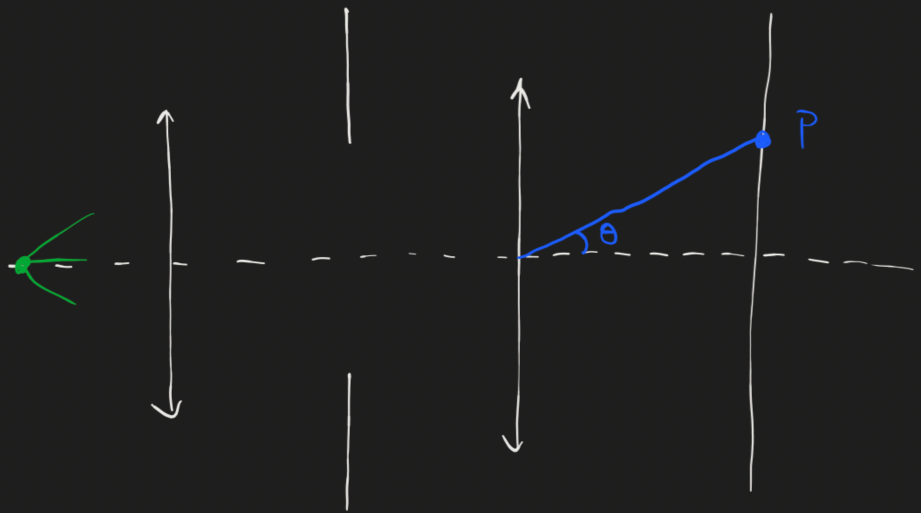
$N\delta = \alpha$

$$\delta = \frac{kd}{2}\sin\theta$$

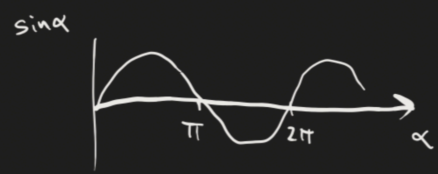
$$N\delta = \frac{\overset{a}{Nkd}}{2}\sin\theta = \boxed{\frac{ka}{2}\sin\theta \equiv \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} E(P,t) = A(\theta)\cos(kx_1' - \omega t + \alpha) \\ A(\theta) = E_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta}$$



$$A(\theta) = E_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad , \qquad \alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta$$



Ceros de A :

$$\alpha = m\pi \quad , \qquad m \neq 0$$

$$k = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}$$

$$\frac{k a}{\cancel{2}} \sin\theta = m\cancel{\pi}$$

$$\frac{a}{\lambda} \sin\theta = m$$

$$\boxed{\sin\theta = m\frac{\lambda}{a} \quad , \quad m \neq 0}$$ Ceros de A

Extremos de A :

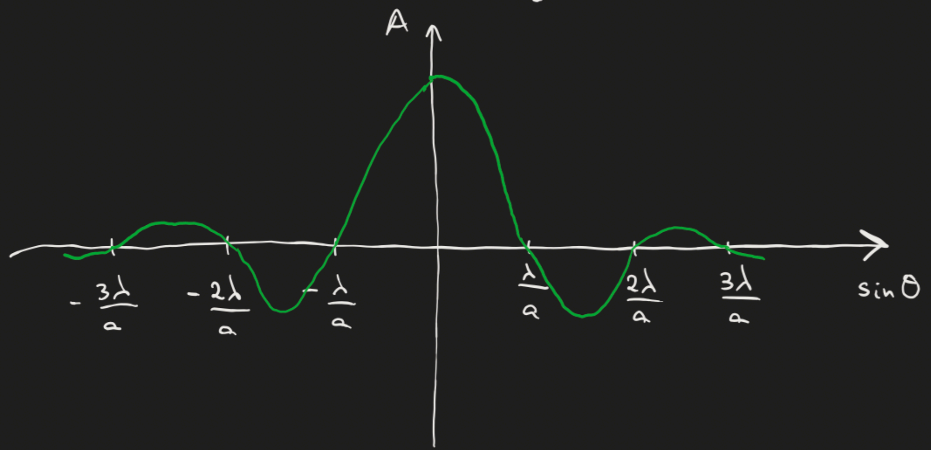
$$A'(\alpha) = E_0 \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) =$$

$$= E_0 \left(\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right) = 0$$

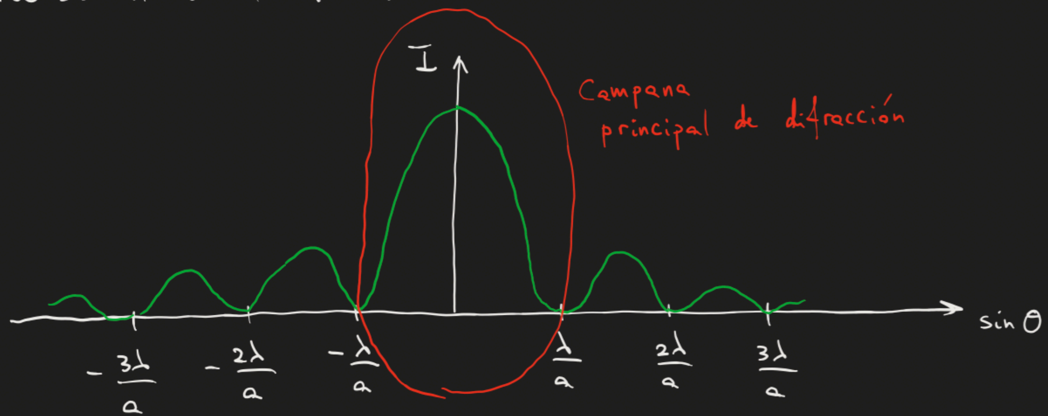
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

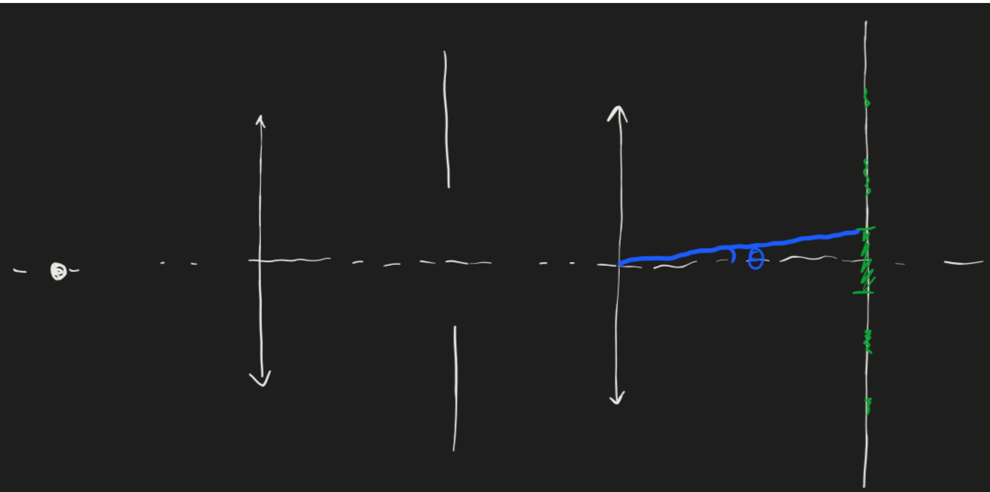
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = tg\,\alpha}$$ Extremos de A

1er extremo $\alpha = 0 = \frac{ka}{2}\sin\theta \Big\} \Rightarrow \sin\theta = 0$



Intensidad de la luz: $I = A^2$





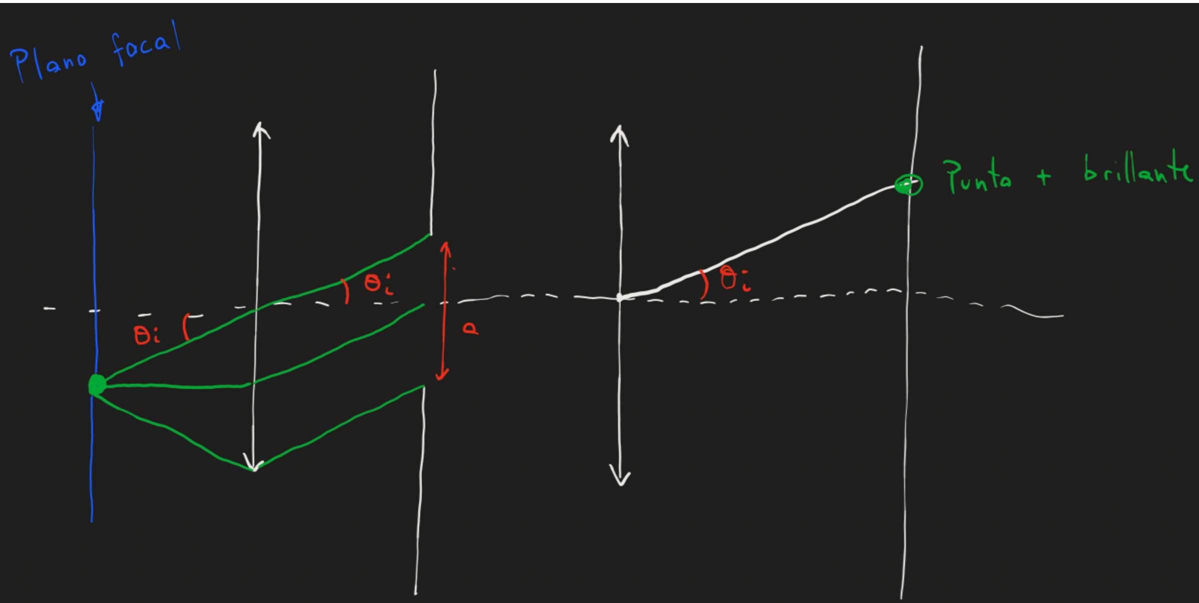
Semiancho de la campana principal:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

$a >> \lambda$ $\Rightarrow$ Campana principal muy estrecha

$\Rightarrow$ Vemos un punto, como si no hubiera barrera NO hay difracción

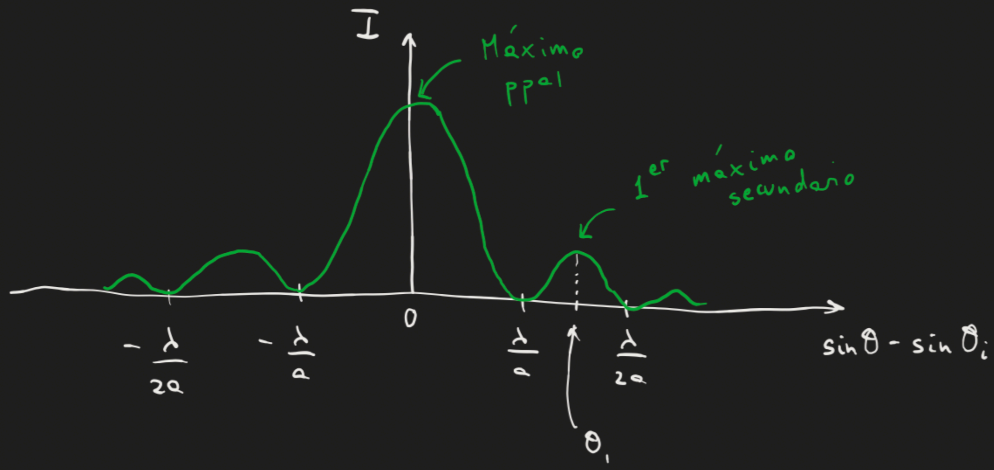
$a \lesssim \lambda$ $\Rightarrow$ Campana principal ocupa toda la pantalla.



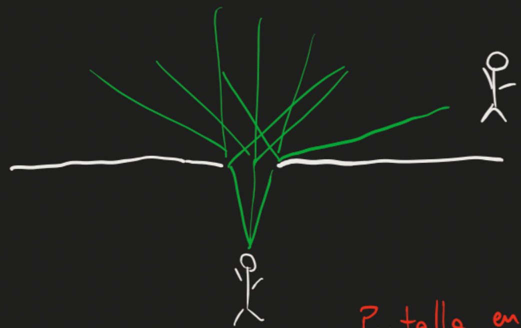
En este caso, todo es igual que antes reemplazando

$\sin\theta$ por $\sin\theta - \sin\theta_i$

$$A(\theta) = E_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad , \quad \alpha = \frac{ka}{2}\left(\sin\theta - \sin\theta_i\right)$$



Ahora el punto más brillante ya no es $\theta = 0$ sino $\theta = \theta_i$



Pantalla en plano focal de la 2ª lente

Nada interesante en la dirección $\odot$

Centro del plano focal

Ejercicio 2

Considere la figura de difracción de Fraunhofer producida por una rendija de ancho a y largo b ($b \gg a$) ubicada entre dos lentes convergentes y centrada en el eje óptico del sistema. La fuente puntual monocromática de longitud de onda λ se coloca en el foco objeto de la primera lente.

(a) ¿Dónde se coloca la pantalla de observación para observar difracción de Fraunhofer?

(b) Calcule la posición de los máximos y de los mínimos de intensidad, el ancho angular de la campana principal de difracción y de los máximos secundarios.

(c) Calcule la relación de intensidades entre el máximo principal y el primer máximo secundario.

(d) Grafique la intensidad sobre la pantalla. ¿En función de qué variables lo hace? ¿Podría haber elegido otras? ¿Cuáles?

(e) Discuta cómo se modifican los parámetros de la figura de difracción si se cambia:

(i) el ancho de la ranura.

(ii) la longitud de onda.

(iii) la fuente monocromática por una policromática.

(f) Resuelva todo el problema nuevamente si la fuente se encuentra en el plano focal objeto de la primera lente a una altura h del eje óptico.

(a) Plano focal 2^a lente

(b) Ya lo hemos hecho

Semiancho campana ppal $\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$

Supongamos $\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{a}$

$\Rightarrow$ Ancho de la campana principal $\boxed{\Delta\theta = \frac{2\lambda}{a}}$

(c) $$\frac{I_1}{I_0} = \frac{\cancel{E_0^2}\left(\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}\right)^2}{\cancel{E_0^2}\left(\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0}\right)^2} = \left(\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}\right)^2$$

$\frac{0}{0} \nearrow$ $\frac{\cos\alpha_0}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$

L'Hôpital

$$= \cos^2\alpha_1 = \cos^2\left[\underset{\overset{\shortparallel}{\frac{3\pi}{2}}}{(1.4)\pi}\right] \ll 1$$

$\uparrow$ En los máximos,

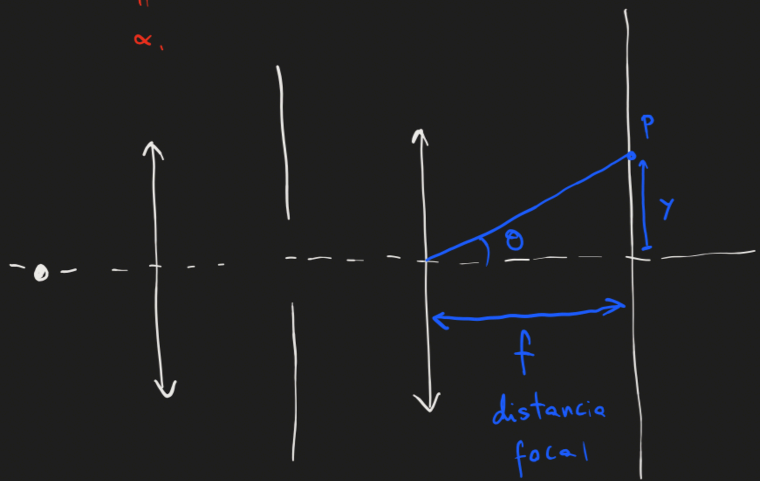
$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$$\boxed{\alpha = tg\,\alpha} \Longrightarrow \alpha_1 = tg\,\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}$$

Wolfram $\downarrow$

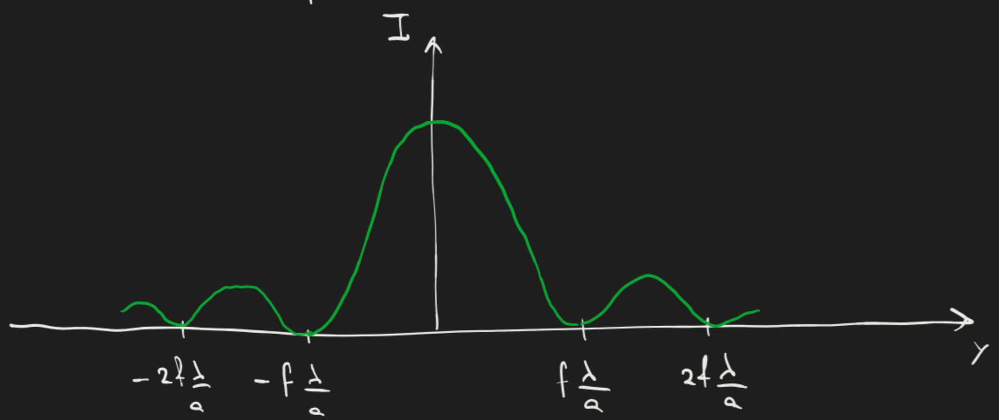
$$\alpha = 0,\ \underset{\overset{\shortparallel}{\alpha_1}}{(1.4)\pi},\ \dots$$

(d)



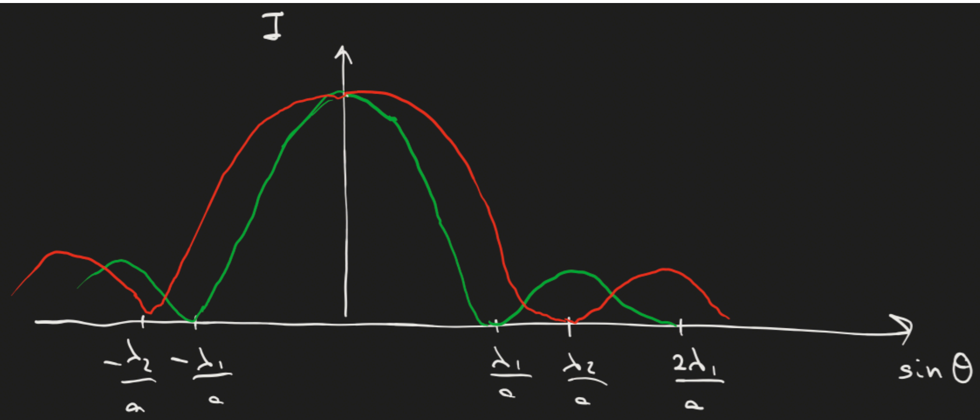
Mientras $\theta << 1$, $\sin\theta \simeq \theta \simeq tg\,\theta = \frac{Y}{f}$

$\sin\theta \simeq \frac{Y}{f} \Rightarrow y = f \sin\theta$



(e) Si aumento a (o disminuyo λ), disminuye el ancho de la campana principal

Fuente policromática (λ_1 , λ_2)



Máximo ppal mismo para todos los colores

Máximos secundarios dependen del color $\Big\} \Rightarrow$ Si la fuente emite luz blanca (todas las longitudes de onda), el máximo ppal es blanco y los secundarios de colores

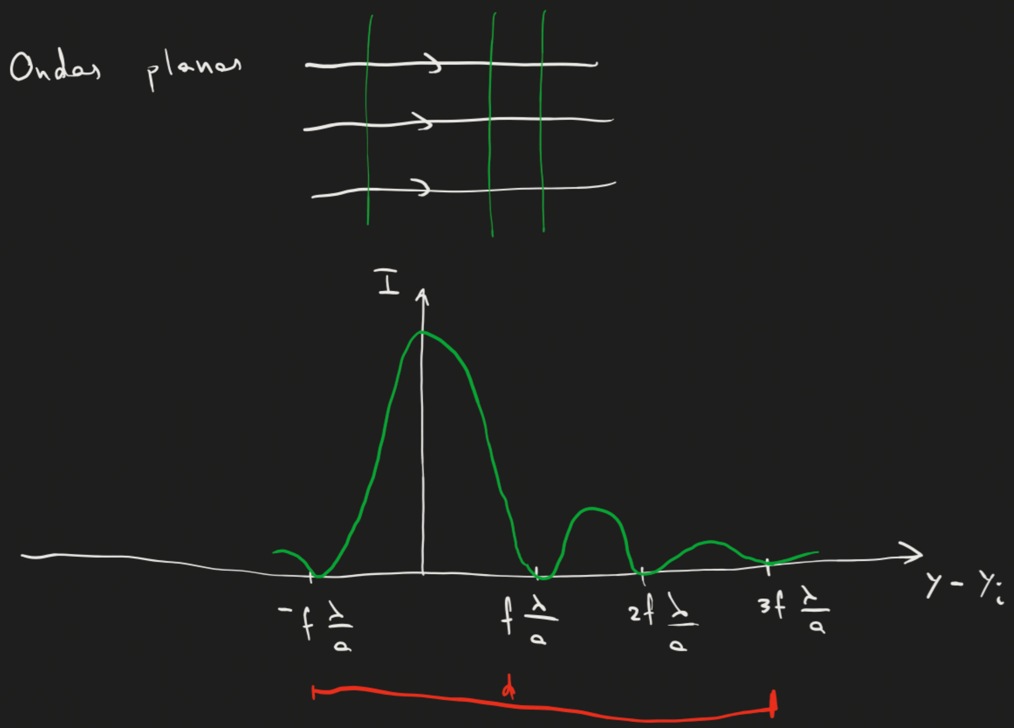
(f) Todo igual reemplazando $\sin\theta$ por $\sin\theta - \sin\theta_i$

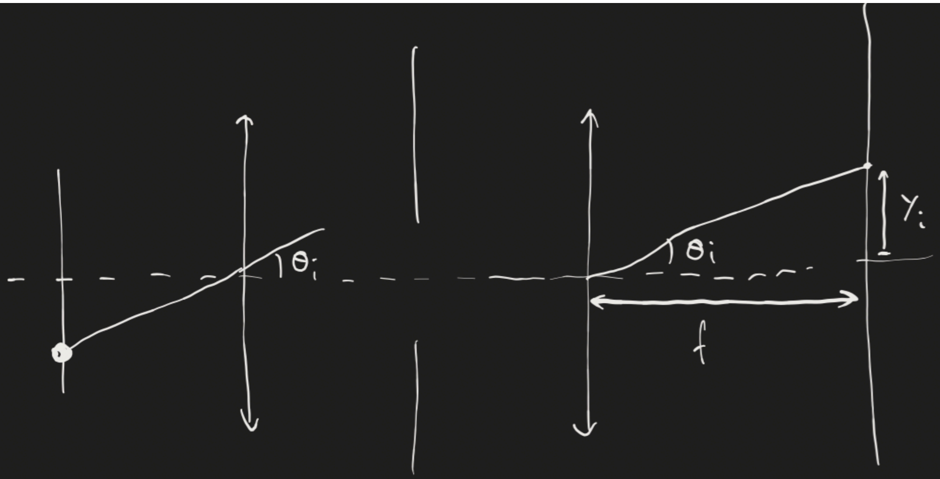
Ejercicio 3

Una rendija de ancho $a = 0{,}25\text{mm}$ y largo $b \gg a$ está colocada delante de una lente convergente. Dicha rendija está iluminada por ondas planas que inciden sobre ella, siendo $\lambda = 500\text{nm}$. En el plano focal imagen de la lente se observa una figura de difracción. La distancia entre el primer mínimo a la izquierda del máximo principal y el tercer mínimo a su derecha es 3mm. Además, el primer mínimo a la izquierda está ubicado 3mm a la derecha del eje óptico.

(a) ¿Cuánto vale la distancia focal de la lente usada?

(b) ¿Dónde se encuentra la fuente? ¿Dónde el máximo principal?





$$y = f \sin\theta \longrightarrow y_i = f \sin\theta_i$$

(a) $$y_3 - y_{-1} = 4 f \frac{\lambda}{a} \Rightarrow f = \frac{a}{4\lambda} \underbrace{\left(y_3 - y_{-1}\right)}_{= d \text{ dato}}$$

(b) $$y_{-1} - y_i = - f \frac{\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = y_{-1} + f \frac{\lambda}{a}}$$

Dato (a)