Guía 4

Friday, 12 February 2021 11:06

Fuerza magnética de q_1 sobre q_2:

$$\vec F = q_2 \vec v_2 \times \vec B$$

Campo magnético creado × q_1

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec v_1 \times \hat r}{r^2}$$ ← Ley de Biot-Savart

Permeabilidad vacío

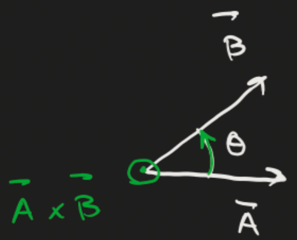
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \; \frac{T\,m\,s}{C} = \frac{T\,m}{A} = \frac{N}{A^2}$$

Unidades:

$$\frac{N\,s}{C\,m} = \frac{N}{A\,m} \equiv T \quad (\text{Tesla})$$

$\frac{s}{C} = A$

*



$$|\vec A \times \vec B| = AB \sin\theta$$

$$\vec B \times \vec A = -\vec A \times \vec B$$

$\hat x \quad \hat y \quad \hat z \quad \hat x \quad \hat y$

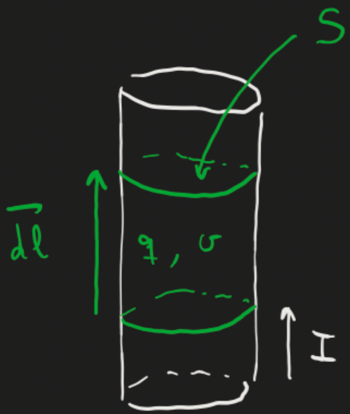
* $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = 0$

FI $\to$ ||

$\frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2 \right)$

$\Rightarrow \boxed{v \ \text{constante}}$

* Hilo de corriente



I = carga que atraviesa S por unidad de tiempo

$q v = I \frac{dl}{v} \cdot v = I\, dl$

||

q

$$\boxed{q \vec{v} = I\, \vec{dl}}$$

Tiempo para cruzar S :

$dt = \frac{dl}{v}$

$I = \frac{dq}{dt} = v \frac{dq}{dl}$

Fuerza sobre pedazo de hilo:

$$d\vec{F} = I\, \vec{dl} \times \vec{B}$$

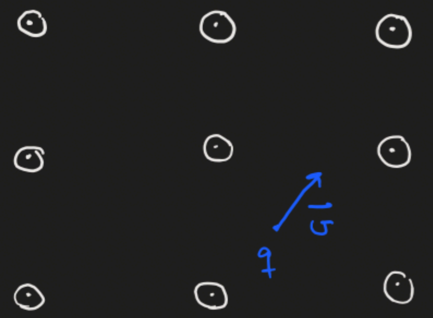
Campo creado por pedazo de hilo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

Ejercicio 1
Una partícula de carga q se mueve en un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ con una velocidad $\mathbf{v}$ perpendicular al campo.

vel. angular

(a) Calcule el radio de la órbita circular descripta. ¿Aumenta el módulo de la velocidad? ¿Por qué?
(b) Determine la frecuencia del movimiento circular descripto.
(c) ¿Qué sucedería si la velocidad es paralela al campo magnético? ¿Y si tiene una componente paralela al campo y otra perpendicular?



(a) Mov. circular uniforme: $\vec F = \vec F_c \underset{\uparrow \atop \text{FI}}{=} -\frac{mv^2}{r}\hat r$

$\vec F \perp \vec v$, F constante

$$\left.\begin{array}{l} \vec F = q\vec v \times \vec B \perp \vec v \\ \\ F = qvB \quad \text{constante} \end{array}\right\} \rightsquigarrow \text{Mov. circular uniforme}$$

$$F = F_c \quad ; \qquad q\cancel{v}B = \frac{mv^{\cancel{2}}}{r} \longrightarrow \boxed{r = \frac{mv}{qB}}$$

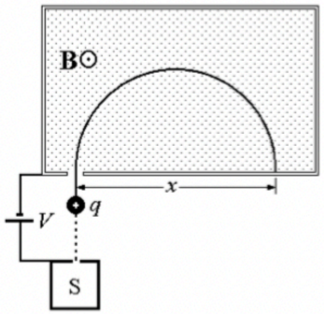
(b) $$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\cancel{v}}{m\cancel{v}}qB = \boxed{\frac{qB}{m} = \omega}$$ Frecuencia de ciclotrón

(c) $\vec v \parallel \vec B \Rightarrow \vec F = 0 \Rightarrow$ MRU

En general,

Ejercicio 3

La figura muestra un dispositivo empleado para la medición de la masa de los iones. Un ión de masa m y carga $+q$ sale esencialmente en reposo de la fuente S, cámara donde se produce la descarga de un gas. La diferencia de potencial V acelera el ion y se permite que entre en una región con un campo magnético perpendicular uniforme $\mathbf{B}$. Dentro del campo, el ión se mueve en semicírculo, chocando con una placa fotográfica a la distancia x de la rendija de entrada. Demuestre que la masa m del ion está dada por: $m = \frac{B^2 q}{8 \cdot V} \cdot x^2$



$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \underbrace{U}_{= qV}$$

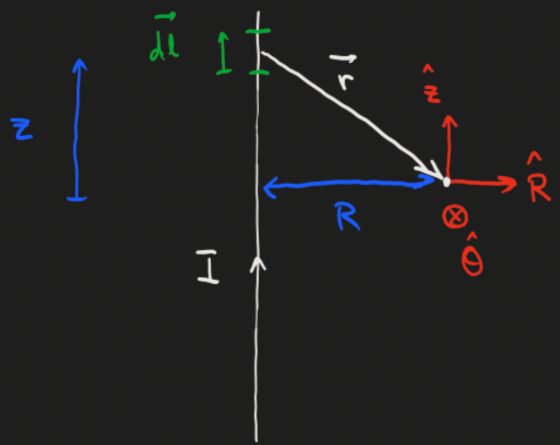
$$\left.\begin{array}{ll} E = qV & \leftarrow \text{Energía inicial} \\ E = \frac{1}{2} m v^2 & \leftarrow \text{" final} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = qV$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}}$$

Ejercicio 4

Calcule la fuerza por unidad de longitud entre dos cables paralelos por los que circula una corriente de 30 A. La separación entre cables es de 2 cm. Estime hasta que distancia por encima de los cables se verá afectada la indicación de una brújula. Considere los dos posibles sentidos de circulación de la corriente. (Suponga que la intensidad del campo magnético terrestre en el lugar es de 5×10^{-4} T y forma un ángulo de 30° con la vertical).

Campo magnético de un cable



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{dl} = dz\,\hat{z}$$

$$\vec{r} = R\,\hat{R} - z\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{dl} \times \vec{r} = dz\,\hat{z}$$

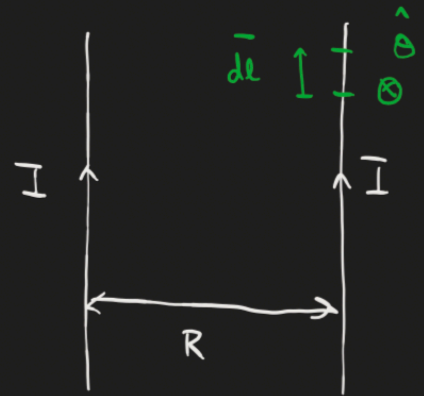
$$= R\,dz\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\,dz\,\hat{\theta}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int \vec{dB} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,dz\,\hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\, \hat{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\, \hat{\theta} = \vec{B}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \left. \frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{R^2} - \left(-\frac{1}{R^2}\right) = \frac{2}{R^2}$$



$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

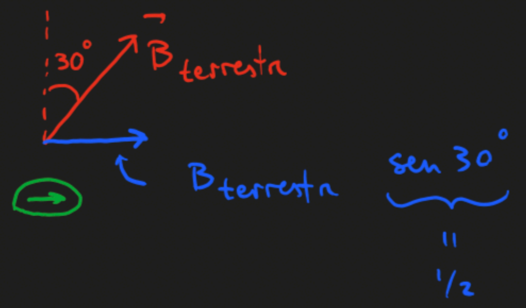
$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R}\, d\vec{l} \times \hat{\theta}$$

$$d\vec{l} \times \hat{\theta} = dl\,(-\hat{r})$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi R}\, dl\, \hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{F}}{dl} = -\frac{\mu_0 I^3}{2\pi R}\, \hat{r}}$$

Hasta qué distancia de 1 hilo se ve afectada brújula?



$$\left.\begin{array}{l} B_{hilo} = B_{terrestre}/2 \\ \quad \shortparallel \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R} \end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{\mu_0 I}{\cancel{2}\pi B_t/\cancel{2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi B_t} = \frac{4 \times 30 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-4}} \text{ m}$$

$I = 30$ A

$B_t = 5 \times 10^{-4}$ T

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$

$$= 24 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.4 \text{ cm}$$

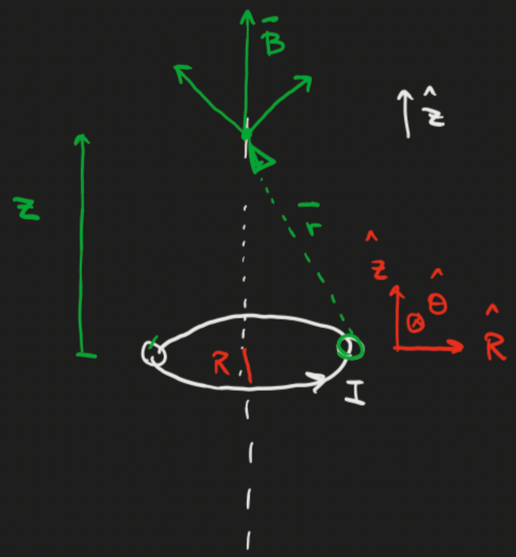
Ejercicio 5

(a) Calcule el campo magnético sobre el eje de una espira circular de área A y corriente I.

(b) Repita el cálculo para una espira cuadrada.

(c) Estudie y compare los comportamientos de ambos resultados para distancias grandes. Expréselos en función de los momentos magnéticos de las espiras.

(a)



$$\vec{B} = B_z \hat{z}$$

$$\hat{R}\ \hat{\Theta}\ \hat{z}\ \hat{R}\ \hat{\Theta}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left(\vec{dl} \times \vec{r}\right)_z}{r^3}$$

$$\vec{dl} = R\, d\theta\ \hat{\theta}$$

$$\vec{r} = \left(-R\hat{R} + z\hat{z}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{dl} \times \vec{r} = R\, d\theta\ \hat{\theta} \times \left(-R\hat{R} + z\hat{z}\right)$$

$$= R\,d\theta \left(-R \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{R}}_{= -\hat{z}} + z \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{z}}_{= \hat{R}} \right)$$

$$= R\,d\theta \left(R\,\hat{z} + z\,\hat{R} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{dl} \times \bar{r} \right)_z = R^2\,d\theta$$

$$\Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2\,d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow B_z = \int dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,d\theta$$

$$= R\,d\theta \left(-R \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{R}}_{= -\hat{z}} + z \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{z}}_{= \hat{R}} \right)$$

$$= R\,d\theta \left(R\,\hat{z} + z\,\hat{R} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{dl} \times \bar{r} \right)_z = R^2\,d\theta$$

$$\Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2\,d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

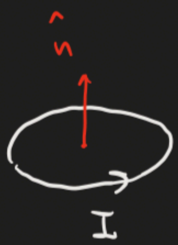
$$\Rightarrow B_z = \int dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

(c) $\quad z \gg R \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \simeq \frac{\mu_0 I}{\pi\, 2} \frac{\pi R^2}{z^3} \hat{z}$

$$= \frac{\mu_0 \overbrace{I A \hat{z}}^{\vec{m}}}{2\pi\, z^3} = \boxed{\frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3} \underset{z \gg R}{\simeq} \vec{B}}$$



Momento magnético

$$\vec{m} \equiv I \cdot A \cdot \hat{n}$$

Ejercicio 6

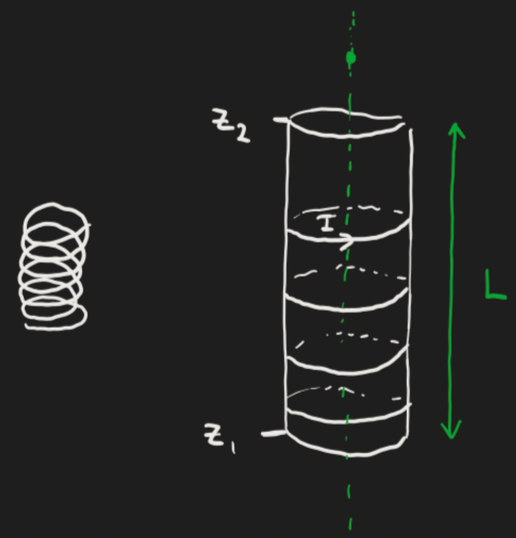
(a) Calcule el campo magnético sobre el eje de un solenoide de longitud L, con N vueltas devanadas densamente, por el que circula una corriente I.

(b) Estudie el comportamiento a grandes distancias y encuentre el valor del momento magnético del solenoide.

(c) Obtenga el límite de solenoide infinito.

(d) Suponga que el solenoide tiene 40 cm de largo, 10 cm de diámetro y el campo en el centro es de 3 T (éste es un campo muy intenso). Si el solenoide se encuentra en el subsuelo del pabellón I, ¿influirá en la medición del campo magnético terrestre que realizan los alumnos en el segundo piso?

(a)



$$\vec{B} = B_z \hat{z}$$

$$B_z = \sum_{i=1}^{N} B_{zi} = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left[R^2 + (z-z_i)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} R^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta z_i}{\left[R^2 + (z-z_i)^2\right]^{3/2}}}_{(?}$$

$$\uparrow$$

$$L = N \Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta z_i = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$$

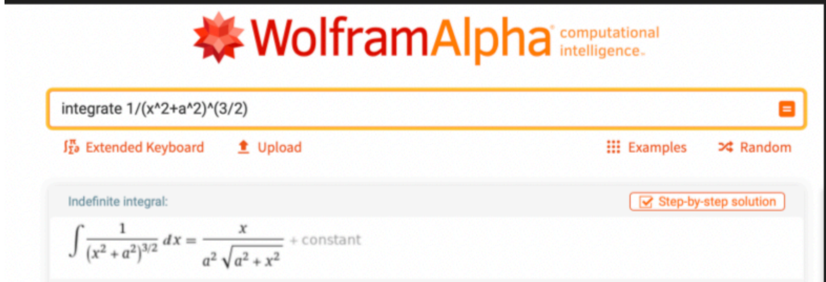
$$n \equiv \frac{N}{L}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left[R^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\parallel \leftarrow x \equiv z' - z$$

$$dx = dz'$$

$$\int_{z_1 - z}^{z_2 - z} \frac{dx}{\left[R^2 + x^2\right]^{3/2}}$$



$$\parallel$$

$$\left. \frac{x}{R^2\sqrt{R^2+x^2}} \right|_{z_1 - z}^{z_2 - z}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{R^2}\left[\frac{z_2 - z}{\sqrt{R^2 + (z_2 - z)^2}} - \frac{z_1 - z}{\sqrt{R^2 + (z_1 - z)^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{B_z = \frac{\mu_0 n I}{2}\left[\frac{z_2 - z}{\sqrt{R^2 + (z_2 - z)^2}} - \frac{z_1 - z}{\sqrt{R^2 + (z_1 - z)^2}}\right]}$$

(c) Solenoide infinito: $z_2 \longrightarrow +\infty$

$z_1 \longrightarrow -\infty$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(1 - (-1)\right) = \boxed{\mu_0 n I = B_z}$$

Ejercicio 7
Calcule la fuerza sobre una aguja pequeña magnetizada con momento magnético m, colocada sobre el eje del solenoide finito del problema anterior. Exprese la fuerza en función de la distancia al centro del solenoide. Discuta el sentido de la fuerza en relación a los sentidos del momento magnético $\mathbf{m}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$.

$$U = -\vec{m}\cdot\vec{B} \longrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U = \boxed{+\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = \vec{F}}$$

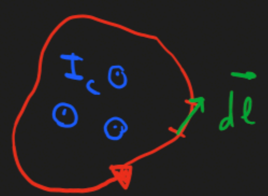
F1

Ejercicio 9
Aprovechando la simetría de la distribución de corrientes y usando la ley de Ampère, determine el vector campo magnético en los siguientes casos:

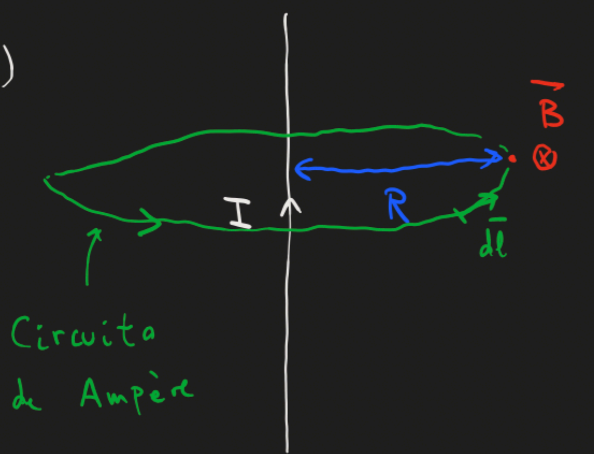
(a) un cable rectilíneo infinito por el que circula una corriente I.
(b) un cilindro infinito de radio R por el que circula una densidad de corriente uniforme $\mathbf{j}$.
(c) un solenoide infinito de n vueltas por unidad de longitud y corriente I (suponga que el devanado es suficientemente denso como para despreciar la componente longitudinal de los elementos de corriente).
(d) un plano infinito con densidad superficial de corriente $\mathbf{g}$ uniforme.
(e) dos planos infinitos paralelos, separados una distancia d, con densidades de corriente uniformes $\mathbf{g}$ y $-\mathbf{g}$.
(f) una lámina infinita de caras plano-paralelas y espesor d, con densidad de corriente $\mathbf{j}$ uniforme.
(g) un toroide de radio interior a y radio exterior b, con un arrollamiento denso de N vueltas por el que circula una corriente I.

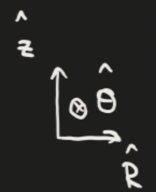
Ley de Ampère: $$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_c$$

corriente concatenada



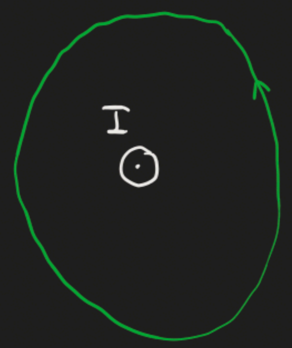
(a)





$$\vec{B} = B(R)\hat{\theta}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint B(R)\, dl$$



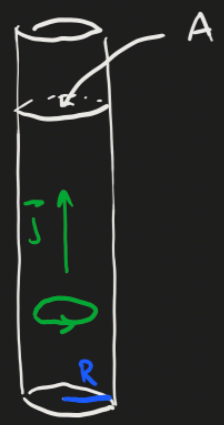
$$= B(R) \underbrace{\oint dl}_{= 2\pi R}$$

$$= B(R)\, 2\pi R = \mu_0 I$$

Ampère

$$\Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,\hat{\theta}}$$

(b)



$$j = \frac{I}{A} \qquad \vec{B} = B(r)\,\hat{\theta}$$

Afuera:
$r > R$

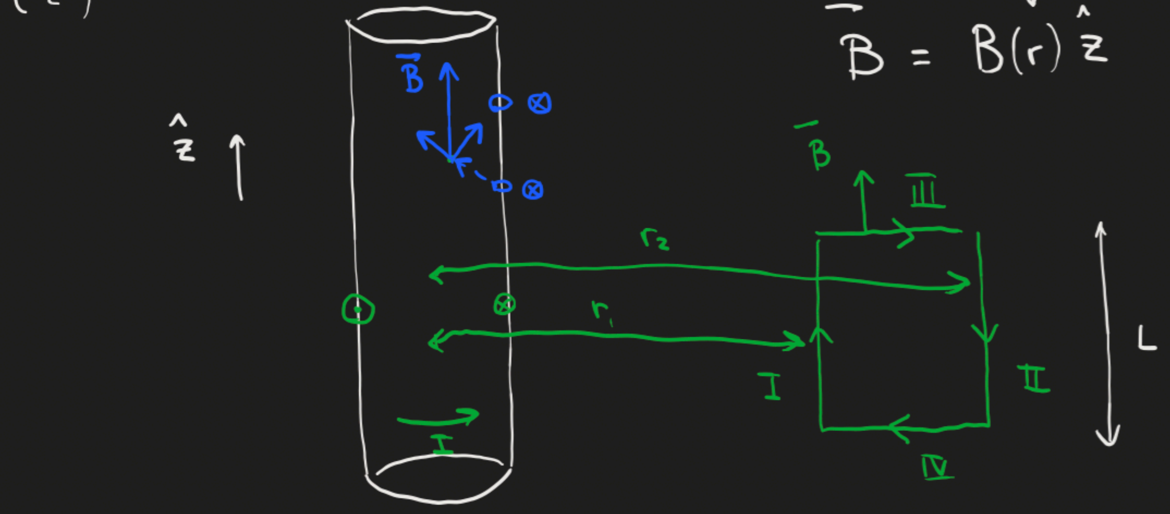
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi r}$$

$$= \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$$

Adentro : $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} j \pi r^2 = \frac{\mu_0 j r}{2}$

$r < R$

(c)



distancia al eje

$\vec{B} = B(r)\,\hat{z}$

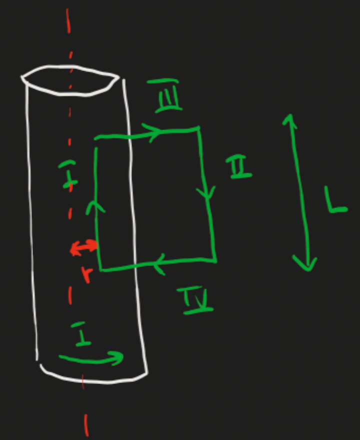
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_{\mathrm{I}} \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{=\int B(r_1)\,dl \,=\, B(r_1) L} + \underbrace{\int_{\mathrm{II}} \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{= -B(r_2) L}$$

$$= L\,[B(r_1) - B(r_2)] = \mu_0\, 0$$

Ampère

$$\Rightarrow B(r_1) = B(r_2) \Rightarrow B \text{ constante afuera}$$

Pero $B \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{B = 0 \text{ afuera}}$

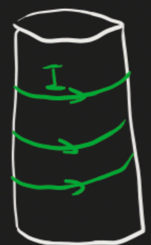


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_I \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_I B(r)\, dl$$

espiras que cruzan el circuito

$$= B(r)\, L = \mu_0\, I\, N$$



$$\Rightarrow B(r) = \mu_0 I \frac{N}{L} = \boxed{\mu_0 n I = B(r)}$$