

# Condensación de Bose-Einstein

Física Teórica 3

## » Gas de partículas idénticas

Para bosones idénticos no interactuantes, la función de partición Gran Canónica

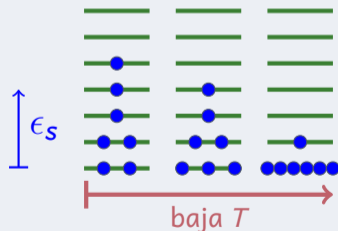
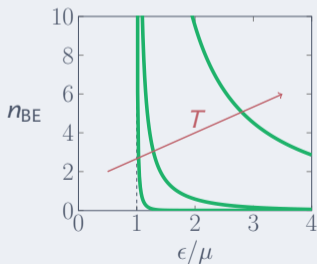
$$\ln Z_{GC} = - \sum_{\text{estados } s \text{ de una partícula}} \ln \left[ 1 - \underbrace{ze^{-\beta\epsilon_s}}_{<1 \Rightarrow \mu \leq \epsilon_s} \right] \quad \Rightarrow \quad N = z \left. \frac{\partial \ln Z_{GC}}{\partial z} \right|_T = \sum_s \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}$$

## » Gas de partículas idénticas

Para bosones idénticos no interactuantes, la función de partición Gran Canónica

$$\ln Z_{GC} = - \sum_{\text{estados } s \text{ de una partícula}} \ln \left[ 1 - \underbrace{ze^{-\beta\epsilon_s}}_{<1 \Rightarrow \mu \leq \epsilon_s} \right] \quad \Rightarrow \quad N = z \frac{\partial \ln Z_{GC}}{\partial z} \Big|_T = \sum_s \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}$$

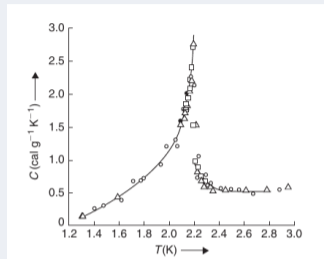
$$n_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$



## » Realizaciones experimentales

### Experimentos en $^4\text{He}$ alrededor 1930-1940.

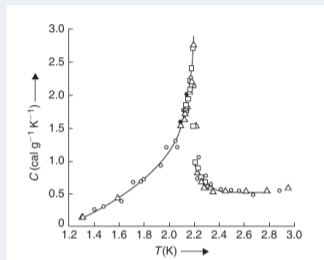
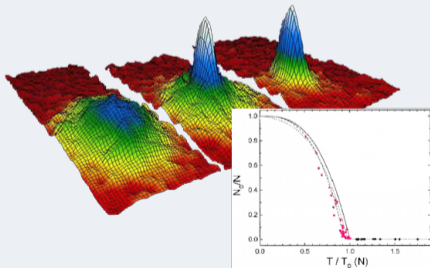
- Similitud en la forma del  $C_v$
- Relación entre superfluidez y condensación de Bose-Einstein.
- El  $^4\text{He}$  es un líquido cuántico (interactuante!).



## » Realizaciones experimentales

### Experimentos en $^4\text{He}$ alrededor 1930-1940.

- Similitud en la forma del  $C_v$
- Relación entre superfluidez y condensación de Bose-Einstein.
- El  $^4\text{He}$  es un líquido cuántico (interactuante!).



### Experimentos en gases de átomos ultra fríos (1995+)

- Interacciones débiles (pero con efectos visibles).
- Sistemas confinados,  $V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ .
- Condensados casi puros y pequeños.

## » Condensación de Bose-Einstein en un potencial armónico en 3D

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

La densidad de estados de 1P se puede aproximar semiclásicamente,

$$\frac{d^3 p d^3 r}{h^3} = g(\epsilon) d\epsilon \quad \Rightarrow \quad g(\epsilon) = \int \frac{d^3 p d^3 r}{h^3} \delta(\epsilon - H(r, p))$$

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \int \frac{dp d^3 r}{h^3} 4\pi p^2 \delta(\epsilon - p^2/2m - m\omega^2 r^2/2) \\ &= \int \frac{d^3 r}{h^3} 4\pi m [2m(\epsilon - m\omega^2 r^2/2)]^{1/2} \Theta(\epsilon - m\omega^2 r^2/2) \end{aligned}$$

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^3}$$

## » La fracción condensada

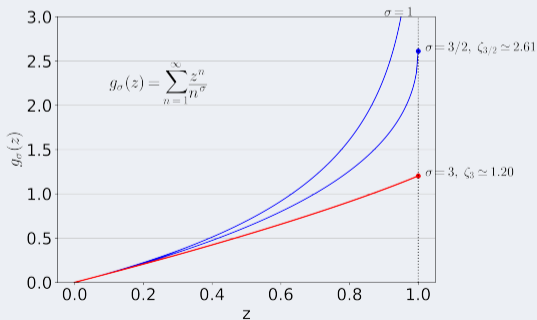
$$N = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = \frac{z}{1-z} + \sum_{s>0} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = N_0 + \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_{\text{BE}}(\epsilon),$$

$$N = N_0 + N_{\text{ex}}, \quad N_{\text{ex}} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega)^3} g_3(z), \quad 1 = \frac{N_0}{N} + \frac{g_3(z)}{N(\beta \hbar \omega)^3}$$

## » La fracción condensada

$$N = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = \frac{z}{1-z} + \sum_{s>0} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = N_0 + \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_{\text{BE}}(\epsilon),$$

$$N = N_0 + N_{\text{ex}}, \quad N_{\text{ex}} = \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(z), \quad 1 = \frac{N_0}{N} + \frac{g_3(z)}{N(\beta\hbar\omega)^3}$$



$$1 = \frac{N_0}{N} + \frac{g_3(z)}{N(\beta\hbar\omega)^3} \leq \frac{N_0}{N} + \frac{\zeta_3}{N(\beta\hbar\omega)^3} \rightarrow$$

$$\frac{N_0}{N} \geq 1 - \frac{\zeta_3}{N(\beta\hbar\omega)^3}$$



## » La fracción condensada

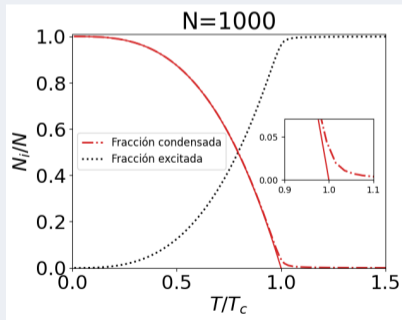
$$N = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = \frac{z}{1-z} + \sum_{s>0} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = N_0 + \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_{\text{BE}}(\epsilon),$$

$$N = N_0 + N_{\text{ex}}, \quad N_{\text{ex}} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega)^3} g_3(z), \quad 1 = \frac{N_0}{N} + \frac{g_3(z)}{N(\beta \hbar \omega)^3}$$

Para un sistema macroscópico,

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 1 - \left[ \frac{T}{T_c^0(N, \omega)} \right]^3 & T < T_c^0 \\ 0 & T > T_c^0 \end{cases}$$

donde  $T_c^0(N, \omega)$  tal que  $N = \zeta_3 \left( \frac{k_B T_c^0}{\hbar \omega} \right)^3$ .



## » La fracción condensada

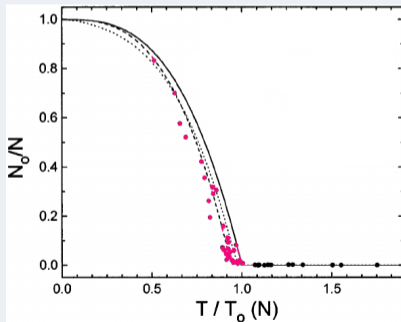
$$N = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = \frac{z}{1-z} + \sum_{s>0} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_0)} - 1} = N_0 + \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_{\text{BE}}(\epsilon),$$

$$N = N_0 + N_{\text{ex}}, \quad N_{\text{ex}} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega)^3} g_3(z), \quad 1 = \frac{N_0}{N} + \frac{g_3(z)}{N(\beta \hbar \omega)^3}$$

Para un sistema macroscópico,

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 1 - \left[ \frac{T}{T_c^0(N, \omega)} \right]^3 & T < T_c^0 \\ 0 & T > T_c^0 \end{cases}$$

donde  $T_c^0(N, \omega)$  tal que  $N = \zeta_3 \left( \frac{k_B T_c^0}{\hbar \omega} \right)^3$ .



[Ensher *et al.* 1996.]

## » Tamaño finito

Puedo corregir teniendo en cuenta la degeneración discreta de los estados, es decir, si  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ , el número de estados es  $\Omega(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\sum_{n=a}^{n=b} f(n) = \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a)) + \dots \quad \text{Euler-Maclaurin}$$

## » Tamaño finito

Puedo corregir teniendo en cuenta la degeneración discreta de los estados, es decir, si  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ , el número de estados es  $\Omega(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\sum_{n=a}^{n=b} f(n) = \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a)) + \dots \quad \text{Euler-Maclaurin}$$

$$N = N_0 + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(\tilde{z}) + \frac{5}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} g_2(\tilde{z}) + \dots$$

## » Tamaño finito

Puedo corregir teniendo en cuenta la degeneración discreta de los estados, es decir, si  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ , el número de estados es  $\Omega(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\sum_{n=a}^{n=b} f(n) = \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a)) + \dots \quad \text{Euler-Maclaurin}$$

$$N = N_0 + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(\tilde{z}) + \frac{5}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} g_2(\tilde{z}) + \dots$$

Así,

$$T_c = T_c^0 \left( 1 - \frac{\zeta_2}{2\zeta_3^{2/3}} \frac{1}{N^{1/3}} \right)$$

[H. Haugerud *et al.*, Phys. Lett. A 225, 18 (1997).]

## » Tamaño finito

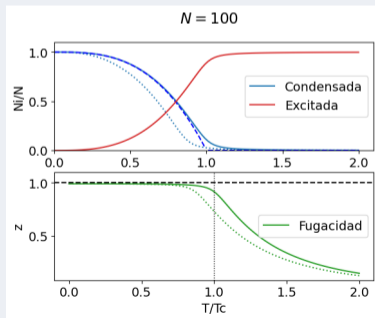
Puedo corregir teniendo en cuenta la degeneración discreta de los estados, es decir, si  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ , el número de estados es  $\Omega(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\sum_{n=a}^{n=b} f(n) = \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a)) + \dots \quad \text{Euler-Maclaurin}$$

$$N = N_0 + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(\tilde{z}) + \frac{5}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} g_2(\tilde{z}) + \dots$$

Así,

$$T_c = T_c^0 \left( 1 - \frac{\zeta_2}{2\zeta_3} \frac{1}{N^{1/3}} \right)$$



## » Tamaño finito

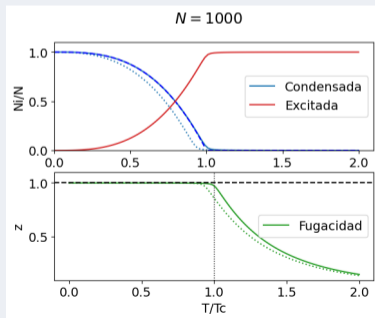
Puedo corregir teniendo en cuenta la degeneración discreta de los estados, es decir, si  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ , el número de estados es  $\Omega(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\sum_{n=a}^{n=b} f(n) = \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a)) + \dots \quad \text{Euler-Maclaurin}$$

$$N = N_0 + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(\tilde{z}) + \frac{5}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} g_2(\tilde{z}) + \dots$$

Así,

$$T_c = T_c^0 \left( 1 - \frac{\zeta_2}{2\zeta_3} \frac{1}{N^{1/3}} \right)$$



## » Tamaño finito

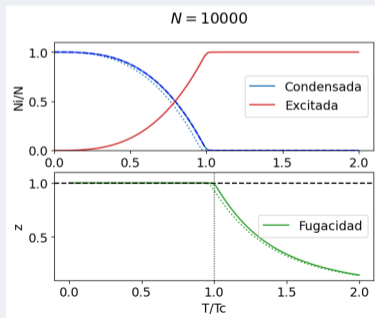
Puedo corregir teniendo en cuenta la degeneración discreta de los estados, es decir, si  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ , el número de estados es  $\Omega(n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\sum_{n=a}^{n=b} f(n) = \int_a^b dx f(x) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a)) + \dots \quad \text{Euler-Maclaurin}$$

$$N = N_0 + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(\tilde{z}) + \frac{5}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} g_2(\tilde{z}) + \dots$$

Así,

$$T_c = T_c^0 \left( 1 - \frac{\zeta_2}{2\zeta_3} \frac{1}{N^{1/3}} \right)$$





## » La forma del condensado y la nube térmica

El estado fundamental  $\psi$  se puebla con  $N_0$  partículas, por lo tanto,

$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{3/2} e^{-m\omega r^2/\hbar},$$

mientras que para la nube térmica  $n_T$

$$\begin{aligned} n_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\beta(p^2/2m + V_{\text{ext}}(r) - \mu)} - 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left( e^{\beta(\mu - m\omega^2 r^2/2)} \right) \end{aligned}$$

con  $\lambda_T = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2} \simeq 0,1 - 1\mu\text{m}$  (a  $T_c$ ).

## » La forma del condensado y la nube térmica

El estado fundamental  $\psi$  se puebla con  $N_0$  partículas, por lo tanto,

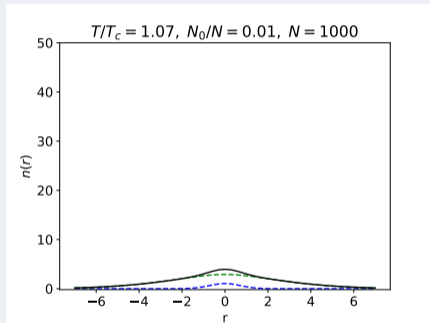
$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{3/2} e^{-m\omega r^2/\hbar},$$

mientras que para la nube térmica  $n_T$

$$\begin{aligned} n_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\beta(p^2/2m + V_{\text{ext}}(r) - \mu)} - 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left( e^{\beta(\mu - m\omega^2 r^2/2)} \right) \end{aligned}$$

con  $\lambda_T = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2} \simeq 0,1 - 1\mu\text{m}$  (a  $T_c$ ).

A muy baja temperatura, alcanza con estudiar  $\psi(r)$ .



## » La forma del condensado y la nube térmica

El estado fundamental  $\psi$  se puebla con  $N_0$  partículas, por lo tanto,

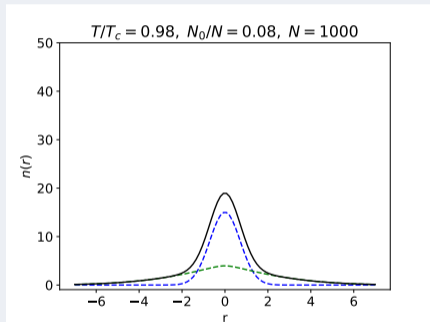
$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{3/2} e^{-m\omega r^2/\hbar},$$

mientras que para la nube térmica  $n_T$

$$\begin{aligned} n_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\beta(p^2/2m + V_{\text{ext}}(r) - \mu)} - 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left( e^{\beta(\mu - m\omega^2 r^2/2)} \right) \end{aligned}$$

con  $\lambda_T = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2} \simeq 0,1 - 1\mu\text{m}$  (a  $T_c$ ).

A muy baja temperatura, alcanza con estudiar  $\psi(r)$ .



## » La forma del condensado y la nube térmica

El estado fundamental  $\psi$  se puebla con  $N_0$  partículas, por lo tanto,

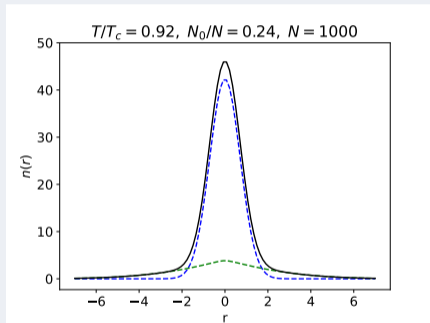
$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{3/2} e^{-m\omega r^2/\hbar},$$

mientras que para la nube térmica  $n_T$

$$\begin{aligned} n_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\beta(p^2/2m + V_{\text{ext}}(r) - \mu)} - 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left( e^{\beta(\mu - m\omega^2 r^2/2)} \right) \end{aligned}$$

con  $\lambda_T = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2} \simeq 0,1 - 1\mu\text{m}$  (a  $T_c$ ).

A muy baja temperatura, alcanza con estudiar  $\psi(r)$ .



## » La forma del condensado y la nube térmica

El estado fundamental  $\psi$  se puebla con  $N_0$  partículas, por lo tanto,

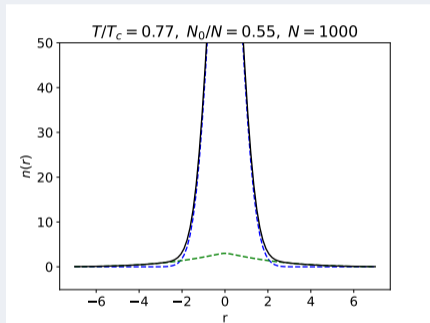
$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{3/2} e^{-m\omega r^2/\hbar},$$

mientras que para la nube térmica  $n_T$

$$\begin{aligned} n_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\beta(p^2/2m + V_{\text{ext}}(r) - \mu)} - 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left( e^{\beta(\mu - m\omega^2 r^2/2)} \right) \end{aligned}$$

con  $\lambda_T = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2} \simeq 0,1 - 1\mu\text{m}$  (a  $T_c$ ).

A muy baja temperatura, alcanza con estudiar  $\psi(r)$ .



## » En resumen

- La condensación de Bose-Einstein de un gas debilmente interactuante predice la ocupación macroscópica del estado fundamental de 1 partícula.
- En el gas atrapado por un potencial armónico,  $T_c \simeq 10 - 0,1\mu K$  y se observa claramente.
- El condensado a baja temperatura determina las propiedades del sistema.

## » En resumen

- La condensación de Bose-Einstein de un gas debilmente interactuante predice la ocupación macroscópica del estado fundamental de 1 partícula.
- En el gas atrapado por un potencial armónico,  $T_c \simeq 10 - 0,1 \mu K$  y se observa claramente.
- El condensado a baja temperatura determina las propiedades del sistema.

También calcularemos y discutiremos,

- ¿Qué pasa con la energía y el calor específico del sistema?
- ¿Y el ensamble canónico?

Más adelante en la materia

- Transiciones de Fase. Modelo de Guinzburg-Landau, para el parámetro de orden  $\psi(\mathbf{r})$  (o función de onda del condensado.)
- Además, a  $T$  muy baja, se estudia la dinámica de condensados de Bose-Einstein a través de  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , que sigue una ecuación de Schroedinger no lineal.

## » ¿Gran canónico o canónico?

Pero los experimentos en átomos fríos son con un número fijo de partículas, ¿es  $N$  suficientemente grande? Dado un microestado determinado por los números de ocupación  $\{n_s\}$  de cada nivel,

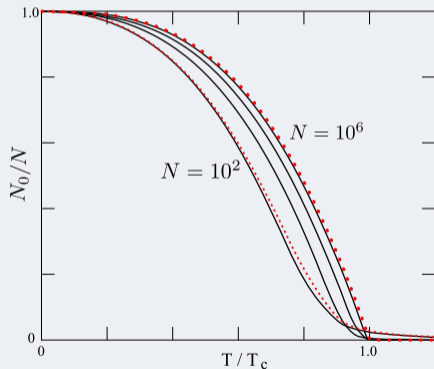
$$\begin{aligned} Z_C(T, N) &= \sum_{\{n_s\}'} e^{-\beta E[\{n_s\}]} = \sum_{\{n_s\}} e^{-\beta E[\{n_s\}]} \delta_{N, \sum n_s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iNz} \sum_{n_0=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{\infty}=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \epsilon_s - i n_s z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iNz} \prod_{s=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_s - iz}} \right)^{(s+1)(s+2)/2} \end{aligned}$$



## » ¿Gran canónico o canónico?

Pero los experimentos en átomos fríos son con un número fijo de partículas, ¿es  $N$  suficientemente grande? Dado un microestado determinado por los números de ocupación  $\{n_s\}$  de cada nivel,

$$\begin{aligned}
 Z_C(T, N) &= \sum_{\{n_s\}'} e^{-\beta E[\{n_s\}]} = \sum_{\{n_s\}} e^{-\beta E[\{n_s\}]} \delta_{N, \sum n_s} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iNz} \sum_{n_0=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{\infty}=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \epsilon_s - i n_s z} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iNz} \prod_{s=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega s - iz}} \right)^{(s+1)(s+2)/2}
 \end{aligned}$$



[H.D. Politzer, Phys. Rev. A 54, 5048 (1996).]