# Aplicaciones del gas de Bose

Lectura: R. K. Pathria & P. D. Beale, Cap. 7., K. Huang Cap. 12, M. Kardar Cap. 6

## » Gas de Fonones

El calor específico de sólidos cristalinos a baja $T$, se distanciaba de la Ley de Dulong-Petit $C_v^{\text{clásico}} = 3NK_B$

En general, $H = K + \Phi$ de un sólido, donde

$$K = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2, \quad \text{y} \qquad \Phi(\{x_i\}) \qquad \text{es la energía potencial}$$

Estudiamos las vibraciones alrededor del equilibrio descrito $\{x_i^e\}$, en términos de $\xi_i = x_i - x_i^e$

$$K = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3N} \dot{\xi}_i^2, \quad \Phi = \Phi(\{x_i^e\}) + \cancel{\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\Big|_{x_i^e} (\xi_i)} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x_i^e} \xi_i \xi_j$$

$$\boxed{H = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m \dot{\xi}_i^2 + \sum_{ij} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j}$$

En coordenadas normales,

$$H = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m \left( \dot{q}_i^2 + \omega_i^2 q_i^2 \right)$$

NB: El número de modos está fijado por el número de sitios de la red, en 3D son $3N$ modos.

### Cuantización & estadística

Dado un $\{n_i\}$,

$$E[\{n_i\}] = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{3N} \left( n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_i \qquad 3N \text{ osciladores independientes}$$

$$Z = \prod_{i=1}^{3N} Z_i = \prod_{i=1}^{3N} \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_i (n_i + 1/2)} = \prod_{i=1}^{3N} \frac{e^{-\beta\hbar\omega_i/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_i}}$$

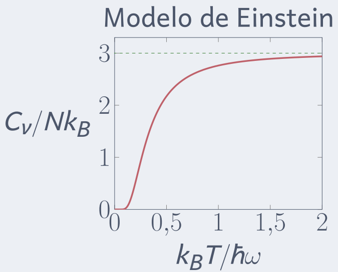
$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = U_0 + \sum_{i=1}^{3N} \left[ \frac{\hbar\omega_i}{e^{\beta\hbar\omega_i} - 1} \right]$$

## » Calor específico

$$C_v(T) = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = k_B \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega_i}}{(e^{\beta\hbar\omega_i}-1)^2}$$

En 1907, Einstein propuso que $\omega_i = \omega_0$, $\forall i$. Con eso,

$$C_V = 3Nk_B(\beta\hbar\omega_0)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega_0}}{(e^{\beta\hbar\omega_0}-1)^2}$$




Con lo cual, a alta $T$ ($\beta\hbar\omega_0 \to 0$), recuperamos Dulong-Petit $C_v = 3Nk_B$ mientras que a baja $T$ decrece demasiado fuertemente, que no corresponde con la observación experimental.

En general, podemos introducir una densidad de modos $g(\omega)$, tal que $\int_0^\infty g(\omega)\, d\omega = 3N$. ¿Pero qué forma tiene sentido?

# » Red unidimensional de átomos idénticos

Supongamos $N$ osciladores,

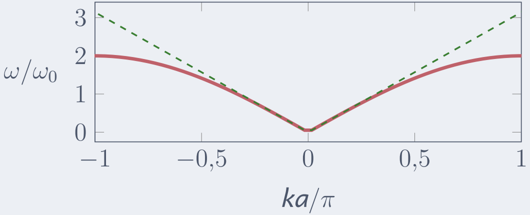

$$H_{1D} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\xi}_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{m\omega_0^2}{2} \left(\xi_j - \xi_{j-1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\xi}_j = -m\omega_0^2 \left(2\xi_j - \xi_{j-1} - \xi_{j+1}\right)$$

Proponemos $\xi_j = Ae^{i(kja-\omega t)}$, condiciones periódicas ($k \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$), $k = \frac{2\pi n}{Na}$ con $n \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$.

$$-m\omega^2 e^{ikja} = -m\omega_0^2 \left(2e^{ikja} - e^{ik(j-1)a} - e^{ik(j+1)a}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 2\omega_0^2(1-\cos ka) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\boxed{\omega = 2\omega_0 \left|\sin \frac{ka}{2}\right|}$$

$\omega \simeq c_s k$ con $c_s$ la velocidad del sonido.



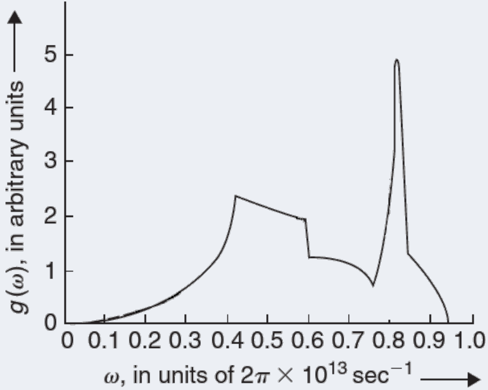
## » En 3D

Si además de 3D, es general $(m_j, \omega_{jl})$

$$\xi_j = A_j\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}_j - \omega t)}$$

conduce a un sistema de autovalores y autovectores,

$$\omega^2 A_j = \sum_l \omega_{jl}^2 A_l e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{q}_l - \boldsymbol{q}_j)}$$



## » Modelo de Debye en 3D (1912)

Supongamos que vibra como un continuo en donde $\omega_k = c_s k$, así podemos obtener la densidad de modos $g(\omega)$. Pero, además de la dirección de propagación $\boldsymbol{k}$, las fluctuaciones tienen una polarización o dirección. Por lo tanto, el estado se caracteriza por $\boldsymbol{k}$ y polarización,

$$3\,\frac{V}{(2\pi)^3} d^3k = g(\omega)d\omega$$

$$3\,\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = 3\,\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{\omega^2}{c_s^3} d\omega = g(\omega)d\omega$$

O sea, $g(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2}\frac{\omega^2}{c_s^3}$, como además el número total de estados debe ser $3N$, esta aproximación impone una frecuencia máxima $\omega_D$ donde tiene validez.

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)\, d\omega = 3N \qquad \Rightarrow \qquad \omega_D = c_s\,(6\pi^2 n)^{1/3}$$

QUe nos permite escribir directamente $g(\omega) = 9N\frac{\omega^2}{\omega_D^3}$.

## » Energía y calor específico

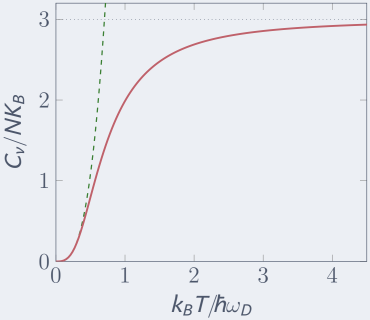
$$C_v(T) = 3Nk_B \frac{3}{(\beta\hbar\omega_D)^3}\int_0^{\beta\hbar\omega_D} \frac{x^4\, e^x}{(e^x-1)^2}\,dx, \quad \boxed{U(T) = \{\} + \frac{k_B T}{(\beta\hbar\omega_D)^3}\, 9N \int_0^{\beta\hbar\omega_D} \frac{x^3}{e^x-1}\,dx}$$

- Si $\beta\hbar\omega_D \gg 1$ (baja $T$).

$$U^* = \frac{k_B T}{(\hbar\omega_D)^3}(k_B T)^3 9N g_4(1)\Gamma(4)$$

- Si $\beta\hbar\omega_D \ll 1$ (alta $T$).

$$\frac{1}{e^x-1} \simeq 1/x \quad (x \ll 1)$$



# » Gas de Fotones

Si tengo un campo EM en una cavidad, puedo tener fluctuaciones del campo. En sus modos normales,

$$H_q = \sum_{k,\alpha} \hbar ck \left( n_\alpha(k) + \frac{1}{2} \right)$$

- Momento: $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$
- Energía: $\hbar\omega = \hbar ck$
- polarizacion $\alpha$; 

Como en los fonones, calculamos la energía media y el calor especifico a partir de la función de partición

$$Z = \sum_{\{n\}} e^{-\beta E[\{n\}]} = \prod_{k,\alpha} \frac{e^{-\beta\hbar\omega(k)/2}}{1 - e^{\beta\hbar\omega(k)}}$$

Podemos calcular la $P$ y $U$ como siempre

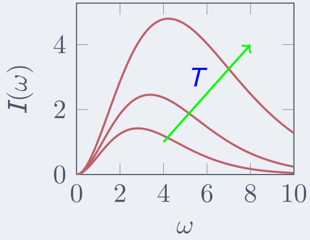
## » La densidad de energía

La densidad de energía de los estados excitados es

$$\frac{U^*}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \int_0^\infty d\omega\, u(\omega, T), \quad \text{con} \quad u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Si realizamos un agujero en la cavidad, el flujo de energía (por unidad de área y tiempo) de fotones que salen se puede calcular $I(\omega, T) = \langle c_\perp \rangle \frac{U^*}{V}$

$$\langle c_\perp \rangle = c \frac{\int_{\mathrm{D}} d\Omega \cos\theta}{4\pi} = \frac{c}{4} \qquad I = \sigma T^4, \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^3} \qquad \text{Ley de Stefan}$$




**Rayleigh-Jeans ($\beta\hbar\omega \ll 1$)**

$$u \sim k_B T \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

**Wien ($\beta\hbar\omega \gg 1$)**

$$u \sim \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\beta\hbar\omega}$$