

# Gas de Fermi

Lectura: R. K. Pathria & P. D. Beale, Cap. 8.

## » Gas no-interactuante en el Gran Canónico

$$Z_{GC} = \sum_{N=0}^{\infty} \left[ z^N \sum_{\{n_i\}}' e^{-\beta \sum_i n_i \epsilon_i} \right] = \sum_{N=0}^{\infty} \left[ \sum_{\{n_i\}}' \prod_i (z e^{-\beta \epsilon_i})^{n_i} \right] = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \cdots = \prod_i \sum_{n_i} (z e^{-\beta \epsilon_i})^{n_i}$$

Recordamos, si es Fermión  $n_i = 0$  o  $1$ , si es Bosón  $n_i = 0, 1, \dots$ .

$$Z_{GC} = \begin{cases} \prod_i \frac{1}{1 - z e^{-\beta \epsilon_i}} & \text{B} \\ \prod_i (1 + z e^{-\beta \epsilon_i}) & \text{F} \end{cases}$$

Cerramos la termodinámica con

$$\text{Gran Potencial} \quad -\beta \Omega = \ln Z_{GC}$$

$$\beta pV = \ln Z_{GC}$$

$$\Omega = -pV$$

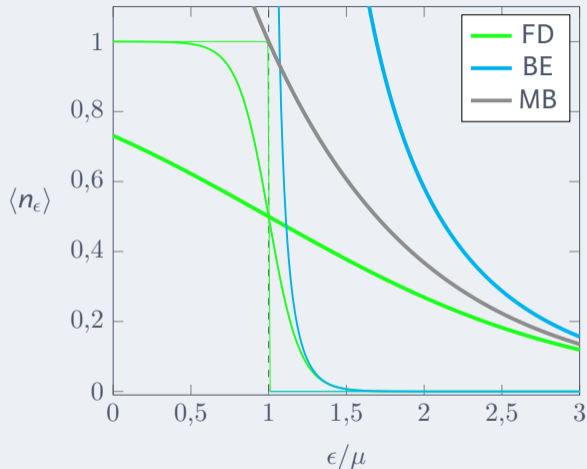
$$= -\frac{1}{\eta} \sum_i \ln (1 - \eta z e^{-\beta \epsilon_i})$$

## » Estadística de los números de ocupación

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - \eta}$$

$$\begin{aligned} \langle n_\epsilon^2 \rangle - \langle n_\epsilon \rangle^2 &= \left[ \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \langle n_\epsilon \rangle \right] \Big|_{z, T} \\ &= \langle n_\epsilon \rangle^2 z^{-1} e^{\beta \epsilon} \\ &= \langle n_\epsilon \rangle^2 \left( \frac{1}{\langle n_\epsilon \rangle} + \eta \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\langle n_\epsilon^2 \rangle - \langle n_\epsilon \rangle^2}{\langle n_\epsilon \rangle^2} = \frac{1}{\langle n_\epsilon \rangle} + \eta$$



## » El Gas de Fermi

Si son Fermiones idénticos ( $\eta = -1$ ),  $\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$ .

Si  $\lambda^3 \gg V/N$  aparecen los efectos cuánticos (repulsivo si F),  
 $\mu \sim U(N+1) - U(N) > 0$

$$\beta pV = \sum_{1P} \ln \left( 1 + ze^{-\beta\epsilon_{1P}} \right)$$

$$N = \sum_{1P} \langle n_{\epsilon_{1P}} \rangle = \sum_{1P} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon_{1P}} + 1}$$

$$U = \sum_{1P} \frac{\epsilon_{1P}}{z^{-1} e^{\beta\epsilon_{1P}} + 1}$$

### Estados 1P

De mínima, los estados están caracterizados por la proyección de spín  $s$  y una parte espacial, e.g.,

$$\{1P\} = \{s, \mathbf{p}\}$$

$$\sum_{1P} \dots = \sum_{s, \mathbf{p}} \dots = \sum_s \sum_{\mathbf{p}} \dots = \int \dots g(\epsilon) d\epsilon$$

## » El gas libre

Si tienen  $H = \sum p^2/(2m)$ , las autoenergías de  $H$  no dependen del spin,

$$\begin{aligned}\sum_{1P} \dots &= \overbrace{(2S+1)}^{g_s} \sum_{\mathbf{p}} \dots = g_s \frac{V}{h^3} \int \dots d^3 p = g_s \frac{V}{h^3} \int \dots 4\pi p^2 dp \\ &= g_s \frac{V}{h^3} \int \dots 4\pi (2me) \frac{m}{(2me)^{1/2}} de \quad \text{cambiando vble } e = p^2/2m \\ &= \int \dots g(e) de\end{aligned}$$

con

$$g(e) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi m(2m)^{1/2} e^{1/2}$$

## » El gas libre (cont.)

Lo usamos para calcular,

$$\beta pV = \int g(\epsilon) \ln [1 + z e^{-\beta\epsilon}] d\epsilon \quad N = \int g(\epsilon) \frac{d\epsilon}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1} \quad \text{con } g(\epsilon) = A \epsilon^{1/2}$$

$$\text{y } A = (2S + 1) \frac{V}{h^3} 4\pi m(2m)^{1/2}, A = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} m(2m)^{1/2} \text{ (electrones).}$$

$$\begin{aligned} \beta pV &= \int g(\epsilon) \ln [1 + z e^{-\beta\epsilon}] d\epsilon = - \int \frac{1}{1 + z e^{-\beta\epsilon}} z e^{-\beta\epsilon} (-\beta) A \frac{\epsilon^{3/2}}{3/2} d\epsilon \\ &= \frac{2}{3} \beta \int A \epsilon^{3/2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1} d\epsilon \\ N &= \int A \epsilon^{1/2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1} d\epsilon \end{aligned}$$

## » Las funciones de Fermi

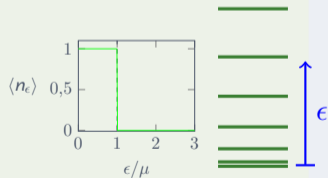
Funciones de Fermi  $f_\sigma(z) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x + 1}$

$$\beta pV = g_s \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z), \quad N = g_s \frac{V}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

### El límite ultradegenerado ( $T \simeq 0$ )

A  $T \simeq 0$  el número de ocupación es un escalón  $\Theta(\beta\mu - x)$ , con  $\Theta$  la función de heaviside,

$$\begin{aligned} f_\sigma(z) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty dx x^{\sigma-1} \Theta(-\alpha - x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{-\alpha} x^{\sigma-1} \\ &= \frac{(-\alpha)^\sigma}{\sigma \Gamma(\sigma)} = \frac{(\beta\mu)^\sigma}{\Gamma(\sigma + 1)} \end{aligned}$$



Usamos la aproximación para la ecuación de estado  $\beta pV$  y  $N$ ,

$$\beta pV = g_s \frac{V (\beta\mu)^{5/2}}{\lambda^3 \Gamma(7/2)} \quad N = g_s \frac{V (\beta\mu)^{3/2}}{\lambda^3 \Gamma(5/2)}$$

Así, podemos relacionar  $n = N/V$  con la energía de Fermi  $\epsilon_F \equiv \mu(T=0)$ ,

$$N = g_s \frac{V (\beta\epsilon_F)^{3/2}}{\lambda^3 \Gamma(5/2)} = g_s \frac{V (2\pi m k_B T)^{3/2} (\beta\epsilon_F)^{3/2}}{h^3 \Gamma(5/2)} = g_s V \frac{1}{6\pi} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \text{ con } \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

con lo cual  $\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$  con  $k_F = (6\pi^2 n/g_s)^{2/3}$ . Usando este resultado podemos ver como es la presión a  $T=0$ , del cociente de las expresiones de arriba,

$$\frac{\beta pV}{N} = \frac{2}{5}\beta\epsilon_F \quad \rightarrow \quad p = \frac{N}{V} \frac{2}{5}\epsilon_F = \frac{2}{5}n\epsilon_F$$

Esto muestra que, a diferencia del gas clásico, el gas de Fermi a  $T=0$  tiene una presión distinta de cero. Que podemos entender por el llenado de niveles con momento  $> 0$  necesario al ser fermiones indistinguibles.



## » ¿Qué a temperatura finita pasa más en general?

Analicemos la función

$$f_{\sigma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma-1}ze^{-x}}{1 + ze^{-x}} dx$$

Desarrollando alrededor de  $z = 0$  podemos integrarla, convirtiéndolo en serie,

$$\begin{aligned} f_{\sigma}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} x^{\sigma-1}ze^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-ze^{-x})^n = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (-ze^{-x})^n (-1)x^{\sigma-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n \left[ \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} x^{\sigma-1} e^{-xn} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^{\sigma}} \\ &= z - \frac{z^2}{2^{\sigma}} + \frac{z^3}{3^{\sigma}} - \dots \end{aligned}$$

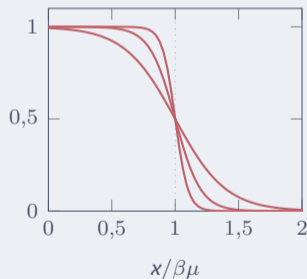
Esta expresión es útil para  $z$  pequeña, o sea en el límite de alta  $T$ .

## » Expansión de Sommerfeld

Y si  $z = e^{\beta\mu}$  es grande, estoy en límite de bajas  $T$ . Calculemos

$$I(T) = \int_0^\infty \frac{h(x)}{e^{x-\beta\mu} + 1} dx. \quad (h \text{ crece más lento que exponencial.})$$

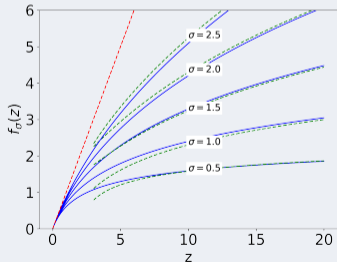
$$\begin{aligned} I(T) &= \int_0^{\beta\mu} \dots + \int_{\beta\mu}^\infty \dots \\ &= \int_0^{\beta\mu} h(x) \left[ 1 - \frac{1}{e^{\beta\mu-x} + 1} \right] dx + \int_{\beta\mu}^\infty \frac{h(x)}{e^{x-\beta\mu} + 1} dx \\ &= \int_0^{\beta\mu} h(x) - \int_0^{\beta\mu} \frac{h(\beta\mu - y)}{e^y + 1} dy + \int_0^\infty \frac{h(y + \beta\mu)}{e^y + 1} dy \\ &\simeq \int_0^{\beta\mu} h(x) + \int_0^\infty \frac{h(y + \beta\mu) - h(\beta\mu - y)}{e^y + 1} dy \\ &= \int_0^{\beta\mu} h(x) + \int_0^\infty \frac{dy}{e^y + 1} 2h'(\beta\mu)y + \int_0^\infty \frac{dy}{e^y + 1} 2h'''(\beta\mu) \frac{y^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$



$$I(T) = \int_0^{\infty} h(x) \frac{dx}{e^{x-\beta\mu} + 1} \simeq \int_0^{\beta\mu} h(x) dx + \frac{\pi^2}{6} h'(\beta\mu) + \frac{7\pi^4}{360} h'''(\beta\mu) + \dots$$

Y en particular,

$$f_{\sigma}(z) \simeq \frac{\ln(z)^{\sigma}}{\sigma\Gamma(\sigma)} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{6} \sigma(\sigma - 1) \ln(z)^{-2} \right] = \frac{(\beta\mu)^{\sigma}}{\sigma\Gamma(\sigma)} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{6} \sigma(\sigma - 1) \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right]$$



La línea roja corresponde al límite clásico  $f_{\sigma}(z) \simeq z$ , y las líneas verdes a la primera aproximación de Sommerfeld.

Veamos como lo usamos, calculemos el potencial químico y la energía a baja  $T$  y de ahí el  $C_V$ .  
 En primera aproximación,

$$f_{3/2}(z) = \frac{(\beta\mu)^{3/2}}{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right] = 4 \frac{(\beta\mu)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T/\mu)^2 \right]$$

Así, de la ecuación para  $N = g_s \frac{V}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$ , reemplazando

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_s \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\beta\mu)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T/\mu)^2 \right]$$

Estamos buscando la primera corrección de  $\mu$  en temperatura, con lo cual debemos pensar que  $\mu(T) = \epsilon_F + \delta\mu$  con  $\delta\mu$  de orden más bajo no nulo en  $T$ . Para encontrar  $\delta\mu$  podemos desarrollar en Taylor lo de arriba, teniendo en cuenta ese orden más bajo. O más fácilmente, notar que como en el corchete aparece  $(k_B T/\mu)^2$  ya aún con  $\mu$  de orden cero en ese corchete tendremos una corrección no nula. Así podemos escribir

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_s \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\beta\mu)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T/\epsilon_F)^2 \right]$$

Las constantes de adelante las reconocemos de la propia definición de  $\epsilon_F$ .

$$N = N(\mu/\epsilon_F)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T/\epsilon_F)^2 \right] \quad \text{despejando } \mu \rightarrow \mu = \frac{\epsilon_F}{\left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T/\epsilon_F)^2 \right]^{2/3}} \simeq \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right)$$

Un tratamiento similar tenemos que hacer para  $U(T)$  para luego calcular el  $c_V$ . En particular conviene primero reescribir  $U$  como

$$U = \frac{3}{2} k_B T N \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \quad \text{ahora aproximando } f_{5/2}(z) \text{ también.}$$

Siguiendo estos pasos llegamos a

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right]$$

con lo cual

$$\frac{c_V}{N k_B} = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} = \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} \quad \text{con } T_F = \epsilon_F/k_B$$

O sea  $c_V$  crece linealmente a baja  $T$ . Notar también que la aproximación de baja  $T$  será pertinente siempre y cuando  $T \ll T_F$ , aun cuando  $T$  pueda parecer elevada.