


Modelo de Ising en 1D

Lectura: R. K. Pathria & P. D. Beale, Cap. 13., K. Huang Cap. 15.

» El Hamiltoniano de Ising en 1D

Considero N sitios en una red unidimensional, en cada sitio hay un spin.

$$H_{\text{Ising}} = -\mu_0 B \sum_i s_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$$


Por conveniencia, trabajamos con condiciones periódicas de contorno

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - \frac{1}{2} \mu_0 B \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1}) \quad \text{definiendo} \quad s_{N+1} \equiv s_1$$

Los estados son $\{s_i\}$, e.g., $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ y la función de partición canónica es

$$Z_c(B, T) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \frac{\beta \mu_0 B}{2} \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1})}$$

$$\begin{aligned}
 Z_C(B, T) &= \sum e^{\delta \sum s_i s_{i+1} + \frac{\alpha}{2} \sum (s_i + s_{i+1})} \\
 &= \sum e^{\delta s_1 s_2} e^{\alpha/2(s_1 + s_2)} \cdot e^{\delta s_2 s_3} e^{\alpha/2(s_2 + s_3)} \dots e^{\delta s_{N-1} s_N} e^{\alpha/2(s_{N-1} + s_N)} e^{\delta s_N s_{N+1}} e^{\alpha/2(s_N + s_{N+1})}
 \end{aligned}$$

Se puede leer como un producto de una misma matriz, $P_{s,s'} = e^{\delta s s' + \alpha/2(s+s')}$

$$Z_C = \sum_{s_1 \dots s_N} P_{s_1 s_2} P_{s_2 s_3} \dots P_{s_N, s_{N+1}=s_1} = \sum_{s_1} (P^N)_{s_1 s_1} = \text{Tr}(P^N)$$

Hay que diagonalizar P

$$P = \begin{pmatrix} e^{\delta+\alpha} & e^{-\delta} \\ e^{-\delta} & e^{\delta-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = e^{\delta} \left[\cosh(\alpha) \pm \sqrt{e^{-4\delta} + \sinh^2(\alpha)} \right], \quad \lambda_1 > \lambda_2$$

Entonces

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

si $N \gg 1$

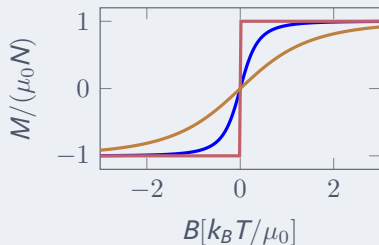
$$F(B, T) = -k_B T \left[N \ln \lambda_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right] \simeq -k_B T N \ln \lambda_1$$

NB: En ausencia de campo, $\alpha = 0$, $\lambda_1 = 2 \cosh \delta$ y

$$F = -k_B T N \ln(2 \cosh \delta) = -k_B T N \ln(2 \cosh \beta J)$$

» Magnetización en el límite termodinámico

$$M = -\left. \frac{\partial F}{\partial B} \right|_T = \frac{N\mu_0 \sinh \beta\mu_0 B}{\sqrt{e^{-4\beta J} + \sinh^2 \beta\mu_0 B}}$$

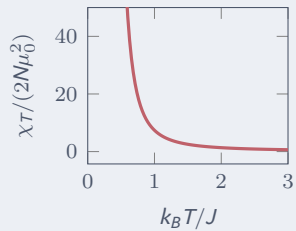
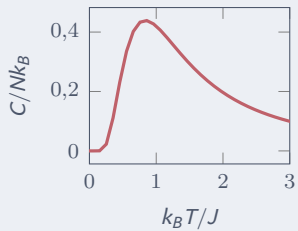
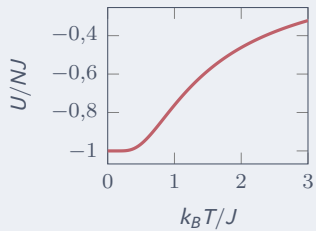


Solo a $T = 0$ hay magnetización espontánea. Otras magnitudes, en ausencia de campo

$$\begin{aligned} U &= -\left. \frac{\partial \ln Z_c}{\partial \beta} \right|_{B,N} \\ &= -NJ \tanh(\beta J) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{N,B} \\ &= Nk_B(\beta J)^2 \operatorname{sech}^2 \beta J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_T &= \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{N,T} \\ &= \frac{N\mu_0^2}{k_B T} e^{2J/k_B T} \end{aligned}$$



» La correlación entre espines

Si nos enfocamos en $B = 0$, sin condiciones periódicas, y dejando la posibilidad de que la interacción entre distintos sitios tengan distintos J_i , tenemos

$$Z_c(N) = \sum_{\{s_i\}} \prod_i e^{\beta J_i s_i s_{i+1}}$$

calculándolo con J_i nos va a permitir calcular la correlación entre espines distantes.

¿Pero como lo calculamos?

$$Z_c(N) = \sum_{s_1 \cdots s_N} e^{\beta J_1 s_1 s_2} e^{\beta J_2 s_2 s_3} \cdots e^{\beta J_{N-1} s_{N-1} s_N} = \sum_{s_1 \cdots s_{N-1}} e^{\beta J_1 s_1 s_2} \cdots e^{\beta J_{N-1} s_{N-2} s_{N-1}} \sum_{s_N} e^{\beta J_{N-1} s_{N-1} s_N}$$

» La correlación entre spines (cont.)

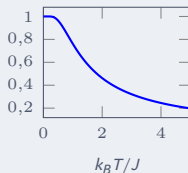
$$\begin{aligned}\sum_{s_N} e^{\beta J_{N-1} s_{N-1} s_N} &= e^{\beta J_{N-1} s_N} + e^{-\beta J_{N-1} s_N} \quad \text{ya que } s_{N-1} = \pm 1 \\ &= 2 \cosh \beta J_{N-1}\end{aligned}$$

Vemos que se arma una recurrencia $Z_N = (2 \cosh \beta J_{N-1}) Z_{N-1}$ por lo cual

$$Z_c(N) = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh \beta J_i$$

$$\langle s_k s_{k+1} \rangle = \frac{1}{Z_c} \frac{\partial Z_c}{\partial (\beta J_k)} = \frac{\partial}{\partial (\beta J_k)} \ln Z_c = \tanh(\beta J_k),$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle s_k s_{k+1} \rangle = 1$$

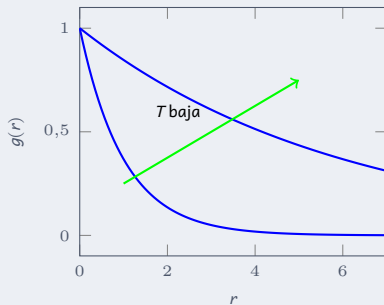


Que pasa con la correlación a medida que nos alejamos r sitios, i.e., $\langle s_k s_{k+r} \rangle$. Teniendo en cuenta que $s_i^2 = 1 \forall i$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle s_k s_{k+r} \rangle &= \langle s_k s_{k+1} s_{k+1} s_{k+2} \cdots s_{k+r-1} s_{k+r} \rangle \\ &= \frac{1}{Z_c} \frac{\partial}{\partial (\beta J_k)} \frac{\partial}{\partial (\beta J_{k+1})} \cdots \frac{\partial}{\partial (\beta J_{k+r-1})} Z_c \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{N-1} \cosh(\beta J_i)} \prod_{i \neq k, k+1, \dots, k+r-1}^{N-1} \cosh(\beta J_i) \prod_{i=k}^{k+r-1} \sinh(\beta J_i) \end{aligned}$$

» Correlación a r sitios

$$g(r) \equiv \langle s_k s_{k+r} \rangle = \prod_{i=k}^{k+r-1} \tanh(\beta J_i)$$
$$= e^{-r/\xi}, \quad \text{con } \xi = 1/(\ln \coth(\beta J))$$



Para bajas temperaturas ($\beta J \gg 1$), o sea, $\coth(x) \simeq 1 + 2e^{-2x}$, $x \gg 1$

$$\xi = \frac{1}{2} e^{2\beta J} \longrightarrow \infty, \quad \text{Si } T \rightarrow 0$$

» Más en general (extra)

Si puedo usar el método de la matriz de transferencia,

$$g(r) = \sum_{i \neq 1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^r \langle u_1 | s_0 | u_i \rangle \langle u_i | s_r | u_1 \rangle, \quad \text{con } P|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \quad [\text{J.M. Yeomans §5.3}]$$

En este caso

$$\xi^{-1} = \ln(\lambda_1/\lambda_2)$$

¿Qué pasa en 2D?

De la solución exacta, Fisher y otros (1959+)

$$g(r) \propto -\frac{e^{-r/\xi}}{(r/\xi)^{1/2}}$$

» El rol de la dimensionalidad: U vs S

1D

a $T = 0$



$S = 0$ 1 estado

$$U = H_{\text{mínimo}}$$

$$F = H_{\text{mínimo}}$$

a $T > 0$



Hay una pared de dominio,

$$\Delta F = 2J - k_B T \ln(N - 1)$$

2D

