Ejercicio 1 (l)-(q) Guía 5

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Breve introducción teórica

Usaremos la expresión del tensor de inercia, $I_{jk} = \int dm(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)$, que conviene escribirlo explícitamente como:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int dm(y^2+z^2) & -\int dmxy & -\int dmxz \\ -\int dmxy & \int dm(x^2+z^2) & -\int dmyz \\ -\int dmxz & -\int dmyz & \int dm(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

si consideramos una rotación del sistema de coordenadas (dados un eje y un ángulo de rotación)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(\varphi)\cdot\mathbf{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{\Omega}' = \mathbf{R}(\varphi)\cdot\mathbf{\Omega}$$

siendo $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{\Omega}'$ las velocidad angulares en ambos sistemas de referencia.

La energía cinética de rotación se expresa:

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^t\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{\Omega} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^t\cdot\underbrace{\mathbf{R}^t(\varphi)\cdot\mathbf{R}(\varphi)}_{\mathbf{1}}\cdot\mathbf{I}\cdot\underbrace{\mathbf{R}^t(\varphi)\cdot\mathbf{R}(\varphi)}_{\mathbf{1}}\cdot\mathbf{\Omega} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{\Omega}^t\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{t}}(\varphi)}_{\mathbf{\Omega}'^t}\cdot\underbrace{\mathbf{R}(\varphi)\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{R}^t(\varphi)}_{\mathbf{I}'}\cdot\underbrace{\mathbf{R}(\varphi)\cdot\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{\Omega}'} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}'^t\cdot\mathbf{I}'\cdot\mathbf{\Omega}' \end{aligned}$$

donde se introdujo la identidad $\mathbf{1} = \mathbf{R}^t(\varphi)\cdot\mathbf{R}(\varphi)$, usando la propiedad de ortogonalidad de las matrices de rotación. Hemos deducido que el tensor de inercia debe transformar a

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{R}^t$$

para que la energía cinética de rotación no cambie (magnitud escalar).

Siendo el tensor $\mathbf{I}$ representado por una matriz simétrica, es diagonalizable. Las direcciones del sistema de coordenadas en los cuales el tensor de inercia es diagonal se denominan ejes principales de inercia. Dichos ejes se obtienen normalmente encontrando los autovectores del tensor de inercia $\mathbf{I}$, y eligiéndolos ortogonales, en caso de haber autovalores degenerados. Los autovalores son los denominados momentos principales de inercia I_n, con $n = 1, 2, 3$, correspondiendo a las direcciones $\mathbf{e_n}$.

2. Problema 1 (l)

Estos items del problema 1 son útiles para identificar los ejes principales de inercia si un cuerpo posee un eje de simetría. La simetría se denomina C_n si al realizar una rotación alrededor del eje en $\phi_n = 2\pi/n \quad n \geq 2$, la distribución de masa del cuerpo es la misma, y por lo tanto la posición del CM y los momentos de inercia no cambian.

Para fijar ideas, haremos una rotación del sistema de coordenadas en ángulo ϕ_n. Esto equivale a una rotación de $-\phi_n$ en el caso de una rotación activa del cuerpo. Para rotaciones alrededor del eje z la matriz de rotaciones está dada por:

$$\mathbf{R}(\phi_n) = \begin{pmatrix} \cos\phi_n & \sin\phi_n & 0 \\ -\sin\phi_n & \cos\phi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada la simetría del cuerpo, si se rota el sistema de coordenadas en ϕ_n alrededor del eje de simetría z entonces la popiedades como posición del CM y el tensor de inercia no deberían cambiar. En el nuevo sistema de coordenadas, el cuerpo se vería exactamente como antes.

Proponemos que el CM (centro de masa) está dada por el vector general (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}). Al rotar el sistema de coordenadas sólo cambianlas componentes x, y del CM:

$$\begin{pmatrix} x'_{CM} \\ y'_{CM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_n & \sin\phi_n \\ -\sin\phi_n & \cos\phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{CM} \\ y_{CM} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_{CM} \\ y_{CM} \end{pmatrix}$$

El sistema lineal tiene solución no trivial si el determinante del sistema es nulo:

$$\begin{vmatrix} \cos\phi_n - 1 & \sin\phi_n \\ -\sin\phi_n & \cos\phi_n - 1 \end{vmatrix} = (\cos\phi_n - 1)^2 + \sin\phi_n^2 = 2(1 - \cos\phi_n) = 0$$

Para los $\phi_n = 2\pi/n$ no se satisface esta igualdad ($n \geq 2$), por lo que la única solución es la solución trivial: $x_{CM} = y_{CM} = 0$. Por consiguiente el CM está en el eje y. Esto es bastante intuitivo, pero la formalización nos va a servir para el análisis del tensor de inercia.

Para ver que el eje z de simetría es un eje principal de inercia, basta probar que $I_{xz} = I_{yz} = 0 = I_{zx} = I_{zy}$. Como antes haremos una rotación del sistema de coordenadas en ϕ_n. Usaremos la transformación de las coordenadas ante rotación para ver cómo transforman las componentes del tensor de inercia. Como antes haremos una rotación del sistema de coordenadas en ϕ_n:

$$I'_{x'z'} = -\int dm x' z = -\int dm(x\cos\phi_n + y\sin\phi_n)z \equiv I_{xz}$$
$$I'_{y'z'} = -\int dm y' z = -\int dm(-x\sin\phi_n + y\cos\phi_n)z \equiv I_{yz}$$

Usando las definiciones de los productos de inercia obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_n & \sin\phi_n \\ -\sin\phi_n & \cos\phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xz} \\ I_{yz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_{xz} \\ I_{yz} \end{pmatrix}$$

Este sistema lineal homogeneo es el mismo que el obtenido para (x_{CM}, y_{CM}), por lo que la solución es:

$$I_{xz} = 0 \qquad I_{yz=0}$$

Concluimos que el eje z es un eje principal. Esto también lo pueden verificar si observan que el eje $\hat{e}_3 = \hat{z}$ satisface la ecuación de autovectores: $\mathbf{I}\hat{e}_3 = I_3\hat{e}_3$.

3. Problema 1(q)

Como queremos saber propiedades de los momentos principales de inercia partimos de ejes principales. Elegimos los ejes x e y coincidentes con los ejes principales de inercia del cuerpo, en adición al eje z de simetría.

Por esta hipótesis, tenemos que $I_{ij} = I_i\delta_{ij}$ (el tensor de inercia es diagonal). Realizamos una rotación del sistema de coordenadas alrededor del eje z en un ángulo $\phi_n = 2\pi/n$.

$$\begin{aligned} I'_{x'y'} &= -\int dm x'y' \equiv I_{xy} = 0 \\ I'_{x'x'} &= \int dm(y'^2 + z^2) \equiv I_1 \\ I'_{y'y'} &= \int dm(x'^2 + z^2) \equiv I_2 \end{aligned}$$

Como antes, la equivalencia indica el uso de la simetría del cuerpo. Usando la primera ecuación:

$$\begin{aligned} I'_{x'y'} &= -\int dm x'y' \\ &= -\int dm(x\cos\phi_n + y\sin\phi_n)(-x\sin\phi_n + y\cos\phi_n) \\ &= -\underbrace{\int dm(y^2 - x^2)}_{I_1 - I_2}\sin\phi_n\cos\phi_n - \underbrace{\int dmxy}_{0}\,(cos\phi_n^2 - \sin\phi_n^2) \\ &= -(I_1 - I_2)\sin\phi_n\cos\phi_n \equiv I_{xy} = 0 \end{aligned}$$

De la última igualdad se obtiene que $I_1 = I_2$ para $n \neq 2$, y $n \neq 4$. El caso $n = 2$ no está incluido en $n > 2$. El caso $n = 4$ implica $x' = y$ e $y' = -x$ por lo que de las últimas dos ecuaciones tendremos nuevamente:

$$I_1 = I_2$$

Concluimos que esta igualdad se mantiene para $n > 2$. Los ejes perpendiculares al eje de simetría poseen autovalores degenerados. Ante cualquier rotación de ejes alrededor del eje z, las nuevas direcciones seguirán siendo autovectores de $\mathbf{I}$, y por consiguiente cualquier par de ejes ortogonales entre sí en el plano perpendicular al eje de simetría de orden $n > 2$, es eje de simetría.

Figura 1: *¿Cómo sabían los inventores de la perinola que esta se comportaría como un trompo simétrico ante rotaciones?.*