

Guia 4: Viscosidad: Ley de Stokes *

Prof. Ana Amador - Turno Laboratorio Martes y Jueves - Dept. Física, FCEyN, UBA.
Nuevo Plan de Carrera

Marzo 2019

1. Introducción:

Cuando un cuerpo se mueve en caída libre en el vacío, el mismo se encuentra sometido sólo a la acción de su peso. Su aceleración es constante (e igual a " g ") y su velocidad aumenta proporcionalmente con el tiempo. ¿Qué diferencia hay cuando el movimiento de caída ocurre en un fluido viscoso, ya sea en aire o en un líquido? En la Figura 1 se muestra el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo que cae en un medio viscoso. Además de a su propio peso (P), el cuerpo es sometido a una fuerza denominada “empuje” (E), de sentido contrario al peso, por el solo hecho de encontrarse sumergido. Además, si el cuerpo se mueve aparece una fuerza viscosa (R) que se opone al movimiento del cuerpo. A diferencia de la fuerza de rozamiento dinámico entre dos superficies, esta fuerza viscosa es proporcional a la velocidad y depende también del tamaño y forma del cuerpo.

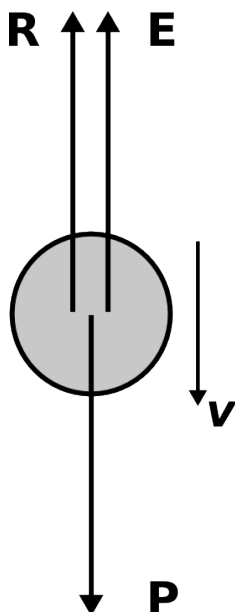


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una esfera en el seno de un fluido viscoso..

*Basada en: <http://materias.df.uba.ar/flbyga2018c1/laboratorio-jueves/>

El peso puede escribirse en función del volumen y la densidad de la esfera como se muestra en la ecuación 1.

$$P = m.g = \frac{4\pi}{3}r^3\delta_{esfera}g \quad (1)$$

Donde r es el radio de la esfera y δ_{esfera} su densidad. Según el principio de Arquímedes, el empuje es igual al peso del líquido desalojado, es decir que la expresión es similar pero usando la densidad del líquido ($\delta_{liquido}$; ec. 3).

$$E = \frac{4\pi}{3}r^3\delta_{liquido}g \quad (2)$$

Para el caso de una esfera en un flujo laminar, la fuerza viscosa puede expresarse según la Ley de Stokes (ec. 3).

$$R = 6\pi r\eta v \quad (3)$$

donde η es el coeficiente de viscosidad del fluido y v su velocidad. Planteando la segunda Ley de Newton a partir de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo (Figura 1) se obtiene la siguiente relación (ec. 4).

$$ma = P - E - R \quad (4)$$

Donde a es la aceleración del cuerpo. Puede verse al aumentar la velocidad, aumenta la fuerza viscosa y se reduce la aceleración. En el límite en que la aceleración se hace nula, la velocidad se hace constante alcanzando su valor límite ($v \rightarrow v_{lim}$). En este punto vale la relación 5.

$$R = E - P \quad (5)$$

Reemplazando las ecuaciones 1-3 en 5, y despejando es posible obtener una expresión para la velocidad límite.

$$v_{lim} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (\delta_{esfera} - \delta_{liquido}) \quad (6)$$

El desarrollo anterior corresponde a la caída de una esfera en el seno de un fluido infinito. Sin embargo, a partir del estudio del movimiento en un fluido contenido en un recinto limitado, por ejemplo un tubo de radio r_{tubo} , Ladenburg propuso la siguiente corrección (ec. 7).

$$v_{lim} = \left(1 + 2,4 \frac{r}{r_{tubo}}\right) v_{medido} \quad (7)$$

Siendo v_{medida} la velocidad límite medida para el movimiento dentro del recipiente.

Más allá de este resultado es importante notar que la ecuación 4 es una ecuación dinámica, y que existe un régimen transitorio hasta llegar a los valores cercanos a la velocidad límite (que por otro lado, nunca se alcanza). Escribiendo la ecuación 4 como ecuación diferencial y agrupando las constantes, se obtiene la ecuación 8.

$$\ddot{x} = \beta - \alpha \dot{x} \quad (8)$$

Proponiendo como solución una exponencial (homogénea) más una lineal (particular), y que parte con velocidad nula como condición de contorno obtenemos las siguientes expresiones para la posición y la velocidad en función del tiempo (ec. 9 y 10 respectivamente).

$$x(t) = v_{lim}t + \frac{v_{lim}}{\alpha} \exp(-\alpha t) \quad (9)$$

$$\dot{x}(t) = v_{lim}(1 - \exp(-\alpha t)) \quad (10)$$

En esta experiencia de laboratorio se estudiará el movimiento de caída de una esfera en el seno de un fluido, registrándolo con una cámara y utilizando el programa de análisis de imágenes *Tracker*¹ para extraer la posición de la esfera en función del tiempo. A partir de las mediciones se espera obtener una descripción del movimiento y un valor para la viscosidad (η). Este método para determinar la viscosidad de un fluido es conocido como el método de Stokes.

2. Actividades

En el laboratorio se cuenta con probetas que pueden llenarse con detergente y esferas de acero de distintos tamaños. Se propone estudiar el movimiento de distintas esferas, determinando la velocidad límite alcanzada y analizando si se alcanza efectivamente o no una velocidad constante.

- ¿Cómo puede determinarse la velocidad límite? ¿Cuál sería su error?
- ¿Cómo determinar la densidad de las esferas y del líquido?
- ¿Cómo podría determinarse η en este experimento?

En particular, en esta práctica se va a adquirir el video de la trayectoria de la esfera de acero cayendo libremente para luego analizar su movimiento con el programa *Tracker*. El programa disponible en las computadoras del laboratorio para adquirir video es AvaCam, en el cual pueden explorar los parámetros de la adquisición².

2.1. Análisis de imágenes con *Tracker*

Tracker es un software gratuito creado por *Open Source Physics* (OSP) con soporte para varios sistemas operativos. El programa permite analizar videos y modelar los resultados. En particular nos interesa una herramienta que permite el seguimiento de objetos (posición, velocidad y aceleración superponiendo los gráficos), posee gran variedad de filtros espaciales para mejorar la imagen, así como también perfiles de línea para analizar espectros y patrones de interferencia. Está especialmente diseñado para ser utilizado en los laboratorios de física universitarios.

Ayuda:

- Es importante que el fondo y la iluminación sean homogéneos para evitar el ruido en la medición.

¹<http://physlets.org/tracker/>

²Este programa guarda todos los videos en [Directorio de programas o C:/AvaCam/CamVideos/

- En cada video que se hace es necesario tener una magnitud patrón para poder calibrar las distancias recorridas. Una vez abierto el archivo en el *Tracker*, hay que elegir los cuadros de interés del video con la herramienta “ajustes de corte” (“*clip settings*”), luego cargar la calibración espacial (utilizando el patrón) con la herramienta “Calibración” y finalmente agregar el sistema de referencia.
- La trayectoria de la esfera se puede determinar de forma manual (cuadro a cuadro marcar posición) o de forma automática. Esta última resulta más precisa. Para ello usar “crear” > “masa puntual” (“*point mass*”). Se elige el *key frame* (que es lo que va a tener que seguir el programa), esto se hace en el primer cuadro de la trayectoria presionando shift+ctrl+click del mouse.
- En el siguiente sitio se pueden encontrar distintos ejemplos: <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/webstart/>, y en el sitio oficial del programa se pueden encontrar tutoriales como: <https://www.youtube.com/watch?v=n4Eqy60yYUY>.